

Problème : inscrire un triangle équilatéral dans un carré.

Les sommets de ce triangle doivent se trouver sur les côtés du carré extrémités exclues. Il y a donc un côté sans sommet. On note $OUWV$ un carré direct, ce qui permet de considérer le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$.

On choisit le côté $[UW]$ comme étant celui sans sommet.

Ainsi, soit A un point de $]OU[$, B un point de $]VW[$ et C un point de $]OV[$ tels que ABC soit un triangle équilatéral direct.

On note a l'abscisse de A , $b + i$ celle de B et ci celle de C . Les nombres a, b et c sont des réels.

ABC équilatéral direct signifie que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Ce qui se traduit par : $ci - a = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(b + i - a)$ et conduit au système :

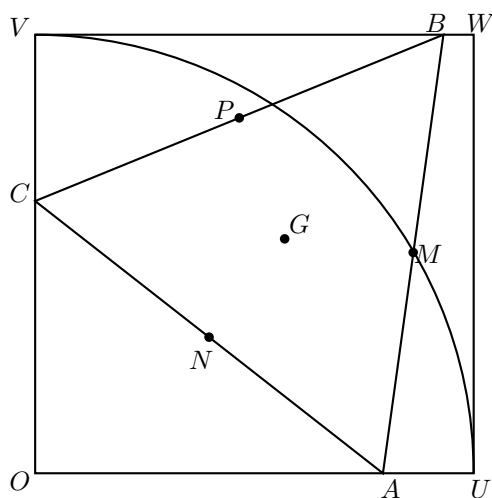
$$\begin{cases} b & = \sqrt{3} - a \\ \sqrt{3}.b - 2c & = \sqrt{3}.a - 1 \end{cases}$$

qui a pour solution $b = \sqrt{3} - a$ et $c = 2 - \sqrt{3}.a$.

Ainsi les abscisses des points A, B et C sont respectivement : $a, (\sqrt{3} - a) + i$ et $(2 - \sqrt{3}.a)i$.

Il apparaît immédiatement que le milieu M de $[AB]$ a pour abscisse $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$. C'est un point fixe indépendant de a .

Ce qui donne un procédé de construction du triangle équilatéral ABC dans le carré $OUWV$: on choisit A sur $]OU[$ de sorte que la droite (AM) coupe le segment $[VW]$ en B . Ayant le côté $[AB]$, on détermine la position de C qui se situe effectivement sur $[OV]$.



Quelles sont les valeurs possibles des réels a, b et c ?

Une position limite de la droite (AM) étant lorsque les points A, M et W sont alignés, on en déduit que a doit être compris entre $\sqrt{3} - 1$ et 1 . De même pour b . Quant à c , il est compris entre $2 - \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} - 1$.

Remarques : si ces encadrements ne sont pas respectés, le triangle équilatéral sort du carré. Ses côtés restent sur les supports de trois des côtés du carré.

On observe que les milieux N et P des côtés $[AC]$ et $[BC]$ sont situés sur des droites fixes ainsi que le centre de gravité G du triangle ABC .

Pierre Lapôte, Lycée S. Berthelot, Calais