IREM Lille AMECMI

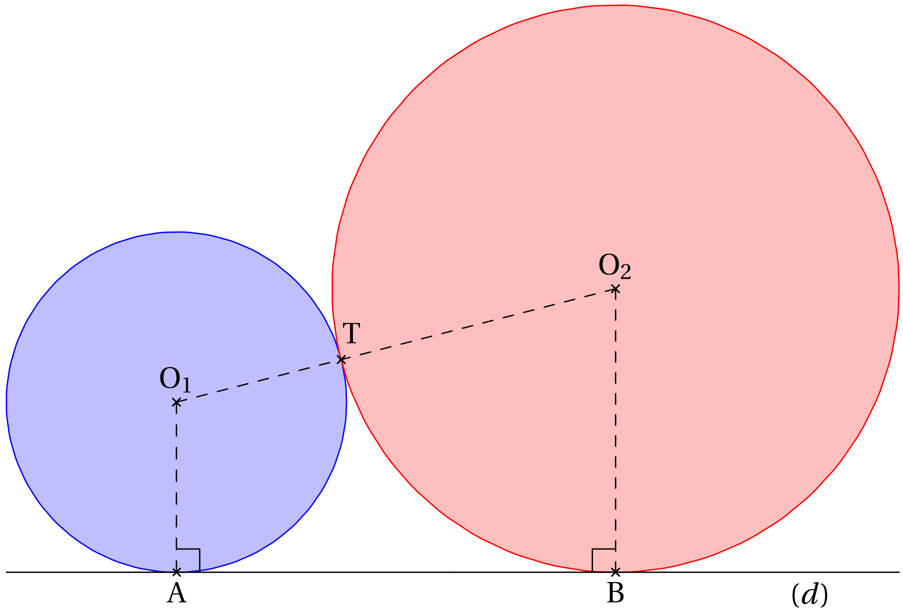
# Les trois cercles

Fiche professeur – Complément

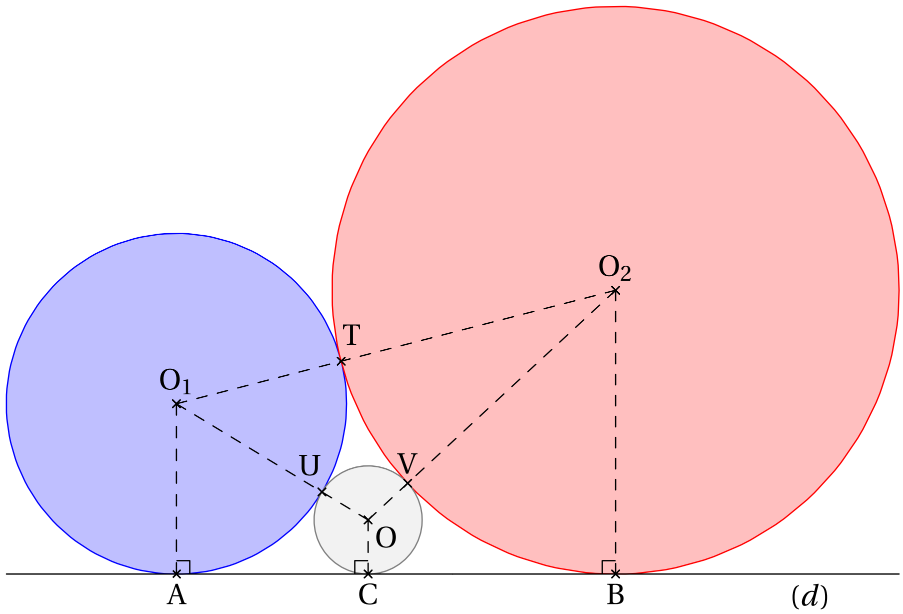
3$^{e}$

Auteurs : Vanreust Stéphane
Eudes Fabrice

**De Wasan aux trois cercles :**
Stéphane Vanreust propose une activité de niveau collège autour d'un Sangaku constitué de deux cercles tangents extérieurement et d'une droite tangente à ces deux cercles en deux points distincts. Dans le livre de Géry Huvent « Sangaku », celui-ci est nommé « Wasan ».




Dans ce même livre, le Sangaku suivant, nommé « Les trois cercles », présente la même configuration géométrique que celle de « Wasan » avec, en sus, un troisième cercle tangent simultanément aux deux autres cercles ainsi qu'à la droite.




Lors d'une réunion du groupe AMECMI, nous discutions de la mise en forme de cette activité, et une question a été posée sur l'existence de ce troisième cercle en fonction des rayons des deux cercles de « Wasan ». En fait, ce troisième cercle existe quelles que soient les valeurs des rayons de ces deux cercles.

**Justification algébrique :**
On nomme respectivement $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centres $O_1$ et $O_2$, de rayons $r_1$ et $r_2$, tangents extérieurement en T. Soit $(d)$ la droite tangente à $\mathscr{C}_1$ en A et à $\mathscr{C}_2$ en B.
Supposons qu'un cercle solution $\mathscr{C}$ existe. On nomme O son centre, $r$ son rayon, C, D et E ses points de tangence respectifs avec $(d)$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. D'après l'activité « Wasan », on a trois conditions nécessaires données par les égalités $AB^2 = 4r_1r_2$, $AC^2 = 4r_1r$ et $CB^2 = 4rr_2$, soit aussi $AB = 2\sqrt{r_1r_2}$, $AC = 2\sqrt{r_1r}$ et $CB = 2\sqrt{rr_2}$ puisque toutes ces quantités sont positives.
Comme $AB^2 = (AC + CB)^2 = AC^2 + 2 \times AC \times CB + CB^2$, on a sucessivement :

$$\begin{aligned}
4r_1r_2 &= 4r_1r + 2 \times 2\sqrt{r_1r} \times 2\sqrt{rr_2} + 4rr_2 \\
r_1r_2 &= r_1r + 2r\sqrt{r_1r_2} + rr_2 \\
r_1r_2 &= r \times (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2 \\
r &= \frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}
\end{aligned}$$

ce qui donne la mesure du rayon de $\mathscr{C}$. Le centre O de $\mathscr{C}$ est alors l'un des points d'intersection du cercle de centre $O_1$ et de rayon $r_1 + r$ avec le cercle de centre $O_2$ et de rayon $r_2 + r$.
Dans la figure GeoGebra `LesTroisCerclesNum.ggb`, on a placé ce centre O sans construire ces cercles. En effet, on peut calculer ses coordonnées dans un repère orthonormé de centre A, d'axes (AB) et $(AO_1)$. Pour cela, on applique le théorème de Pythagore à un triangle rectangle d'hypoténuse $[O_1O]$ et dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes (AB) et $(AO_1)$ :

$$\begin{aligned}
(r_1 + r)^2 &= (r_1 - r)^2 + AC^2 \\
AC^2 &= (r_1 + r)^2 - (r_1 - r)^2 \\
AC^2 &= 4r_1r \\
AC &= 2\sqrt{r_1r}
\end{aligned}$$

donc les coordonnées du centre O de $\mathscr{C}$ sont $(2\sqrt{r_1r}\,;r)$.
On vérifie sans difficultés qu'un tel point O satisfait aux trois conditions de tangence.
**Justification géométrique :**
*à rédiger plus tard, avec figures ...*
**Variantes / Pour aller plus loin / Références :**
✓ Pour la solution purement géométrique, j'ai utilisé les ressources de la page `Construction de cercles` dans la partie `Géométrie dynamique` du site `MIAM` (Mathématiques Internet Aix Marseille). Voir à l'adresse :
`http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/debart/seconde/contruc_cercle.html`
La page en question est très riche ; on peut se contenter de lire les paragraphes 3, 7 et 9.
✓ Le livre de Géry Huvent, *Sangaku, le mystère des énigmes géométriques japonaises*, aux Éditions Dunod.