IREM de Lille

Émergence de la probabilité :
de la définition classique
à l’approche fréquentiste

Recherches historiques de définitions

Questionnements épistémologiques

Stage Probabilités et Statistiques

1 - Le programme de troisième, rentrée 2008,

dans sa présentation parue au BO spécial du 21 avril 2007

1.4. Notion de probabilité [Thèmes de convergence]	- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. - Calculer des probabilités dans des contextes familiers.	La notion de probabilité est abordée à partir de situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes). Certaines de ces situations permettent de rencontrer des cas pour lesquels les probabilités ne sont pas définies à partir de considérations intuitives de symétrie ou de comparaison mais sont approximativement évaluées par les fréquences observées expérimentalement (approche fréquentiste des probabilités). La notion de probabilité est utilisée pour traiter des situations de la vie courante pouvant être modélisées simplement à partir des situations précédentes. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves*.

Dans le cadre du socle, aucune compétence n'est exigible dans le cas des expériences à deux épreuves.

1 - Le programme de troisième, rentrée 2009 et suivantes

BO spécial du 21 août 2008

1.4. Notion de probabilité [Thèmes de convergence]	- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. - Calculer des probabilités dans des contextes familiers.

La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc.).

La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences à une ou à deux épreuves.

1 - Le programme de seconde, rentrée 2009

Post consultation maths, mai 2009

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Probabilité sur un ensemble fini Probabilité d'un Événement Réunion et intersection de deux événements, formule : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.	- Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité. - Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées. - Connaître et exploiter cette formule.	La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. Pour les calculs de probabilités, on utilise des arbres, des diagrammes ou des tableaux.

Quelques définitions de la probabilité trouvées dans les pages de cours de manuels de 3ème, rentrée 2008.

Hachette Education, collection Phare, p. 202-203

a Définition

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité**.

Didier, collection Dimathème, p. 184

Définition

La probabilité d'un événement A est la proportion probable, parmi tous les cas possibles, des cas où A sera réalisé si on répète un grand nombre de fois l'expérience. La probabilité de l'événement A se note $p(\mathrm{A})$.

Hatier, collection Triangle, p. 99

Quand les résultats d'une expérience aléatoire ont tous la même probabilité alors la probabilité d'un événement est égale au quotient :

$$\frac{\text{nombre de résultats favorables à l'événement}}{\text{nombre de résultats possibles}}$$

Nathan, collection Transmath, p. 186

De façon générale :

- la probabilité d'une issue est **un nombre compris entre 0 et 1** ;
- **la somme des probabilités des issues** d'une expérience aléatoire **est égale à 1**.

Différentes approches de la notion de probabilité

Hatier, collection Triangle, p. 99

2. Probabilité

Exercices 9 à 12 p. 102

a) Définition intuitive

DÉFINITION

Pour certaines expériences aléatoires on peut déterminer par un quotient la « chance » qu'un événement a de se produire. Ce quotient est appelé **probabilité** de l'événement.

b) Probabilité et fréquence

PROPRIÉTÉ

Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la fréquence de n'importe quel événement de cette expérience finit par se stabiliser autour d'un nombre qui est la probabilité de cet événement.

c) Calculer une probabilité

PROPRIÉTÉ

Quand les résultats d'une expérience aléatoire ont tous la même probabilité alors la probabilité d'un événement est égale au quotient :

$$\frac{\text{nombre de résultats favorables à l'événement}}{\text{nombre de résultats possibles}}$$

2 - La définition classique, son émergence historique

PREMIER PRINCIPE DE LAPLACE (essai philosophique sur les probabilités, 1812) :

« Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles ».

Comment est-on parvenu à dégager cette « définition » ?

Quelques spots sur son émergence historique

2.1 - Paris sur la somme des points de 3 dés

Fresque du 14ème siècle :

Dames jouant avec 3 dés

Château de Arco di Trento (Italie, pointe nord du lac de Garde)

Les joueurs de dés de Georges de la Tour (1593-1652)

Paris sur la somme des faces de trois dés

Les jeux de hasard ont eu un rôle important dans la naissance du concept de probabilité.

De Vetula :

Un poème médiéval (attribué à Richard de Fournival, 1260) propose l'analyse des jets de 3 dés, comprenant les dénombrements des configurations observables et des résultats possibles pour calculer la valeur à attribuer à chaque issue par les joueurs pariant sur la somme des trois dés.

DE VETVLA LIB. I.

Forte tamen dices quoſdam præſtare quibuſdã
Ex numeris quibus eſt luſoribus uſus, eo quod
Cum decius ſit ſex laterum, ſex & numerorum
Simplicium, tribus in decijs ſunt octo decemq́;.
Quorum non niſi tres poſſunt decijs ſupereſſe.
¶Hi diuerſimode uariantur, & inde bis octo
Compoſiti numeri naſcuntur, non tamen æquæ
Virtutis. quoniam maiores atq; minores
Ipſorum raro ueniunt, medijq; frequenter.
Et reliqui quanto medijs quamuis propiores,
Tanto præſtantes, & ſæpius aduenientes
His punctatura tantum uenientibus una.
Illis ſex, alijs mediocriter inter utroſq;.
Sicut ſint duo maiores, totidemq; minores.
Vna quibus ſit punctatura, duoq; ſequentes.
Hic maior, minor ille, quibus ſit bina duobus.
Rurſum poſt iſtos ſit terna, deinde quaterna,
Quinaq; , ſicut eis ſuccedunt appropiando
Quattuor ad medios, quibus eſt punctatio ſena.
Quæ reddet leuiora tibi ſubiecta tabella.

P. OVIDII NASONIS

666						18
665						17
664	655					16
663	654	555				15
662	653	644	554			14
661	652	643	553	445		13
651	642	633	552	543	444	12
641	632	551	542	533	443	11
631	622	541	532	442	433	10
621	531	522	441	432	333	9
611	521	431	422	332		8
511	421	331	223			7
411	321	222				6
311	221					5
211						4
.1.1.1.						3

Peut-être cependant diras-tu que certaines [*sommes*] sont **plus avantageuses** que d'autres
Parmi les sommes **possibles** pour les joueurs, pour la raison que
Puisqu'un dé a six faces, avec six numéros
Avec trois dés il y en a dix-huit,
Dont trois seulement peuvent se présenter sur les dés [*une fois jetés*].
Ces nombres se présentent diversement, et de là
Apparaissent deux fois huit sommes [*3 à 10 et 11 à 18*], qui cependant ne sont **pas également**
Avantageuses, puisque la plus grande [*18*] et la plus petite [*3*]
D'entre elles **viennent rarement**, et les intermédiaires [*10 et 11*] **fréquemment.**
…
On le voit en permutant les configurations des points. Et c'est ainsi
Qu'en cinquante-six possibilités se répartissent
Les **configurations** des faces ; et ces configurations, en deux cent
Seize **manières de tomber**, lesquelles donnent
Les [*16*] **sommes possibles** pour les joueurs,
Ainsi qu'elles doivent être **réparties** entre eux,
Tu connaîtras pleinement **quelle valeur** peut avoir
L'une quelconque d'entre elles, ou quelle perte.
C'est ce que le tableau ci-dessous peut t'indiquer :

Combien de configurations des points [*sur les dés*]
et combien de manières de tomber
correspondent à l'une quelconque des sommes [*obtenues*]:

Sommes	*configurations des points sur les dés*	*manières de tomber*
3 & 18	1	1
4 & 17	1	3
5 & 16	2	6
6 & 15	3	10
7 & 14	4	15
8 & 13	5	21
9 & 12	6	25
10 & 11	6	27

Total des possibilités pour l'ensemble
des configurations de points : 2 *fois* 108

Galileo Galilei 1564-1642

Portrait conservé à l'Académie des Lincei

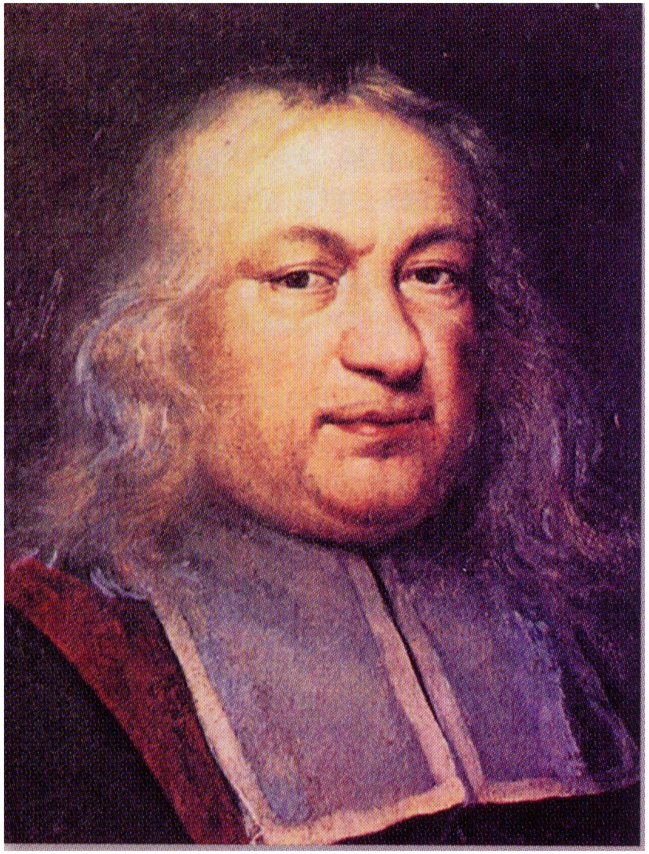
Le problème du Grand Duc de Toscane :

Comment parier sur la somme des points obtenus avec 3 dés ?

« *Bien que le 9 et le 12 se composent en autant de façon que le 10 et le 11, si bien qu'ils devraient être considérés comme ayant la même chance, on voit néanmoins que la longue observation a fait que les joueurs estiment plus avantageux le 10 et le 11 plutôt que le 9 et le 12* »

2.2 - Correspondance de Pascal et Fermat de 1654 sur le problème des partis

Blaise Pascal (1623-1670)



Pierre Fermat (1601-1665)

« Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris »

Lettre de Fermat à Pascal, septembre 1654

« Cette fiction d'étendre le jeu à un certain nombre de parties, ne sert qu'à faciliter la règle, et (suivant mon sentiment) à rendre tous les hasards égaux, ou bien, plus intelligiblement, à réduire toutes les fractions à une même dénomination ».

« Mais parce que M. <de> Roberval sera peut-être bien aise de voir une solution sans rien feindre, et qu'elle peut quelquefois produire des abrégés en beaucoup de cas, la voici en l'exemple proposé :
le premier joueur peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois.
Sil gagne en une seule partie, il faut qu'avec un dé qui a trois faces il rencontre la favorable du coup. Un seul dé produit 3 hasards ; ce joueur a donc pour lui 1/3 des hasards, lorsqu'on ne joue qu'une partie ». …
… « La somme des hasards qui font gagner ce premier joueur, est par conséquent 1/3, 2/9 et 2/27 ce qui fait en tout 17/27 ».

Adresse de Pascal à l'illustre académie parisienne de mathématiques (1654)

… « par l'union ainsi réalisée entre les démonstrations des mathématiques et l'incertitude du hasard, et par la conciliation entre les contraires apparents, [cette recherche] peut tirer son nom de part et d'autre et s'arroger à bon droit ce titre étonnant : ***Géométrie du hasard.*** **…** »

2.3 - Christiaan Huygens

(1629-1695)

S’est intéressé aux jeux de hasard et a suscité une reprise des échanges entre Pascal et Fermat en 1656-1657

Publia en 1657:

De Ratiociniis in ludo aleae

Du calcul dans les jeux de hasard

Christiaan Huygens (1657)

De Ratiociniis in ludo aleae : du calcul dans les jeux de hasard :

« Quoique dans les jeux de hasard pur les résultats soient incertains, la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée ».

Huygens définit l'espérance mathématique :

« Avoir p chances d'obtenir a et q chances d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$ *».*

A la fin de son livre, Huygens pose 5 exercices que jacques Bernoulli résoudra en première partie d'Ars Conjectandi