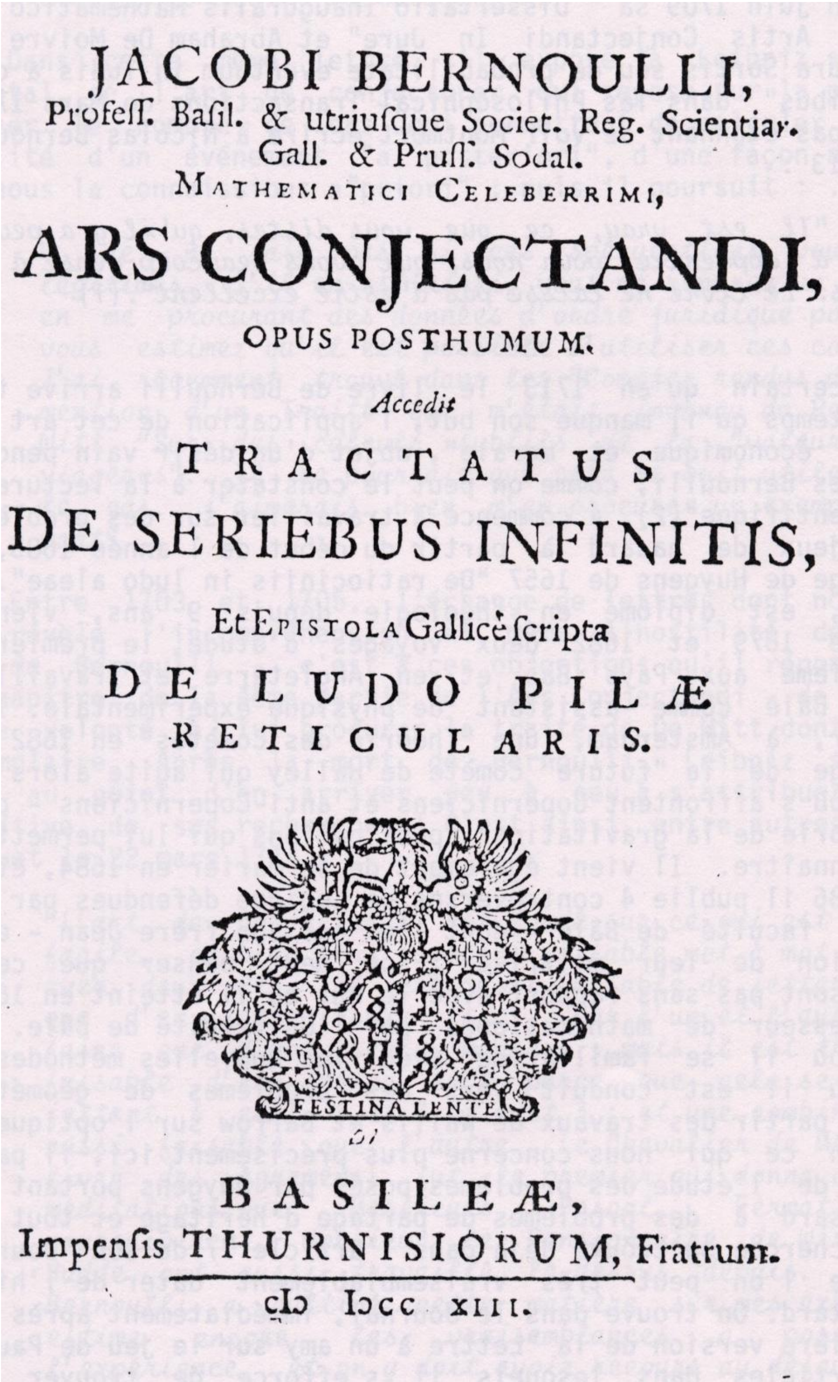
2.4 - Jacques Bernoulli et l’Ars Conjectandi, 1713

Jacques Bernoulli (1654-1705)

« Tout ce qui bénéficie sous le soleil de l'être ou du devenir, passé, présent ou futur, possède toujours en soi et objectivement une certitude totale.

C'est évident du présent et du passé, ce qui est ou a été ne peut pas ne pas être ou avoir été.

Sur le futur il n'y a pas à discuter ; cependant ce n'est pas par la nécessité de quelque destin qu'il ne peut pas ne pas advenir, mais en raison soit de la prescience soit de la prédétermination divine ; car si n'arrivait pas avec certitude tout ce qui est futur, on ne voit pas comment le Créateur suprême pourrait conserver entière la gloire de son omniscience et de son omnipotence ».



JACOBI BERNOULLI,
Profeff. Bafil. & utriufque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruff. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè fcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
FESTINA LENTE
BASILEÆ,
Impenfis THURNISIORUM, Fratrum.
clↄ Iↄcc XIII.

Quatrième partie (1689): *De l’usage et l’application de la doctrine précédente aux affaires civiles, morales et économiques*

Chapitre I : *Préliminaires : la certitude, la probabilité, la nécessité, la contingence.*

« la probabilité est un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout ».

Chapitre II : *Science et conjecture. L’art de conjecturer. Les arguments des conjectures. Axiomes généraux touchant ces points.*

« Conjecturer quelque chose, c’est mesurer sa probabilité : ainsi l’art de conjecturer ou la stochastique se définit pour nous comme l’art de mesurer aussi exactement que possible les probabilités des choses… ».

Chapitre III : *Les divers espèces d'arguments, et comment estimer leur poids pour supputer les probabilités.*

« Posons que le nombre des cas, dans lesquels un argument quelconque peut exister est *b* ; le nombre de ceux dans lesquels il peut arriver qu'il n'existe pas est *c*, (…). Or **je pose que tous les cas sont également possibles**, ou qu'ils peuvent survenir avec une égale facilité ; (…) en sorte qu'**un tel argument prouve** $\frac{b}{b+c}$ **de la chose ou de la certitude de la chose ».**

Chapitre IV : *La double manière de chercher les nombres de cas. Ce qu'il faut penser de celui qui est établi par des expériences.*

« On en est ainsi venu à ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose, il est seulement requis d'une part que **les nombres de cas soient soigneusement déterminés,** et d'autre part que **soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres** **».**

Bernoulli juge ces hypothèses trop restrictives

« Mais c’est ici enfin que surgit une difficulté, nous semble-t-il : cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard que leurs premiers inventeurs ont pris soin d’organiser en vue de se ménager l’équité.
(…) Mais qui donc parmi les mortels définira par exemple le nombre de maladies, (…) qui encore recensera les cas innombrables des changements auxquels l’air est soumis chaque jour ? (…) Il serait donc absolument d’un insensé de vouloir connaître quelque chose de cette matière ».

Réponse : l’**estimation fréquentiste**

(…) « Mais à la vérité ici s’offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. »

« Ce qu’il n’est pas donné d’obtenir *a priori* l’est du moins *a posteriori*, c’est-à-dire qu’**il sera possible de l’extraire en observant l’issue de nombreux exemples semblables**, car on doit présumer que, par la suite, chaque fait peut arriver et ne pas arriver dans le même nombre de cas qu'il avait été constaté auparavant, dans un état de choses semblables, qu'il arrivait ou n'arrivait pas ».

Chapitre V : le théorème de Bernoulli justifie l’approximation de la probabilité par les fréquences observées.

Le savant et philosophe allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a créé son calcul différentiel et intégral à peu près à la même époque où Newton a développé le calcul des fluxions. D'emploi plus commode, le calcul leibnizien s'est imposé tandis que le calcul des fluxions est tombé aux oubliettes (à l'exception de la notation par des lettres pointées).

2.5 - Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Les nouveaux essais sur l'entendement humain,, 1704 :

"J'ai dit plus d'une fois qu 'il faudrait une nouvelle espèce de logique, qui traiterait **des degrés de probabilité.** Il serait bon que celui qui voudrait traiter cette matière poursuivît l'examen des jeux de hasard ; et généralement je souhaiterais qu'un habile mathématicien voulût faire un ample ouvrage bien circonstancié et bien raisonné sur toute sorte de jeux, ce serait de grand usage pour perfectionner l'art d'inventer, l'esprit humain paraissant mieux dans les jeux que dans les matières plus sérieuses."

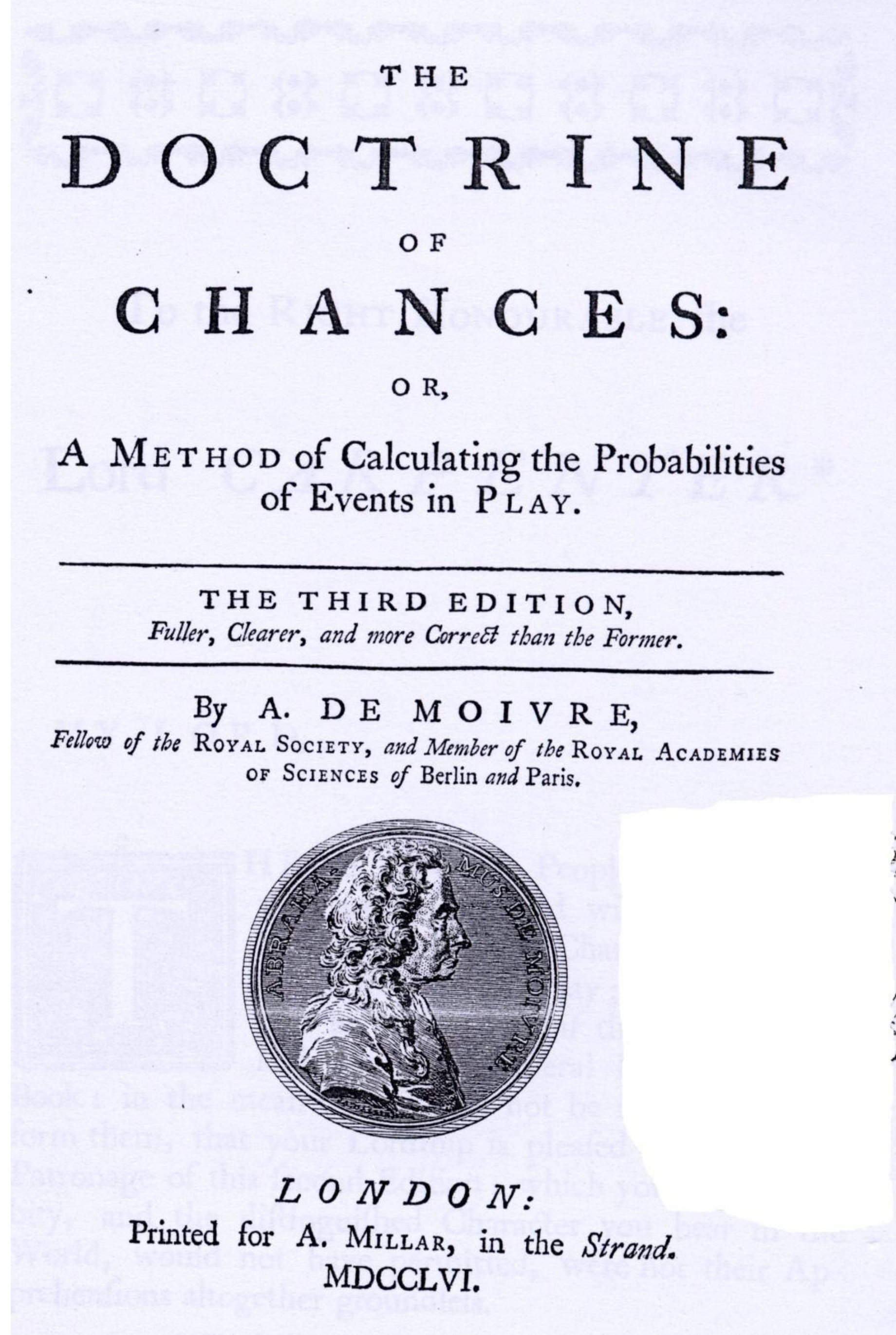
2.6 - Pierre Raymond de Montmort (1678-1719)

Essay d'analyse sur les jeux de hasard, 1708:

« Le sort de Pierre est **le rapport de tous les coups qui lui sont favorables au nombre de tous les coups possibles**. … Dans une gageure égale, les mises des deux joueurs doivent avoir le même rapport que les divers degrés de probabilité ou d'espérance que chacun des joueurs a de gagner ».

2.7 - Abraham de Moivre (1667-1754)

The doctrine of chances, 1718



THE

DOCTRINE

OF

CHANCES:

OR,

A METHOD of Calculating the Probabilities of Events in PLAY.

THE THIRD EDITION,

Fuller, Clearer, and more Correct than the Former.

By A. DE MOIVRE,

Fellow of the ROYAL SOCIETY, *and Member of the* ROYAL ACADEMIES OF SCIENCES *of* Berlin *and* Paris.

LONDON:

Printed for A. MILLAR, in the *Strand.*

MDCCLVI.

THE

DOCTRINE

OF

CHANCES.

The INTRODUCTION.

1. THE Probability of an Event is greater or leſs, according to the number of Chances by which it may happen, compared with the whole number of Chances by which it may either happen or fail.

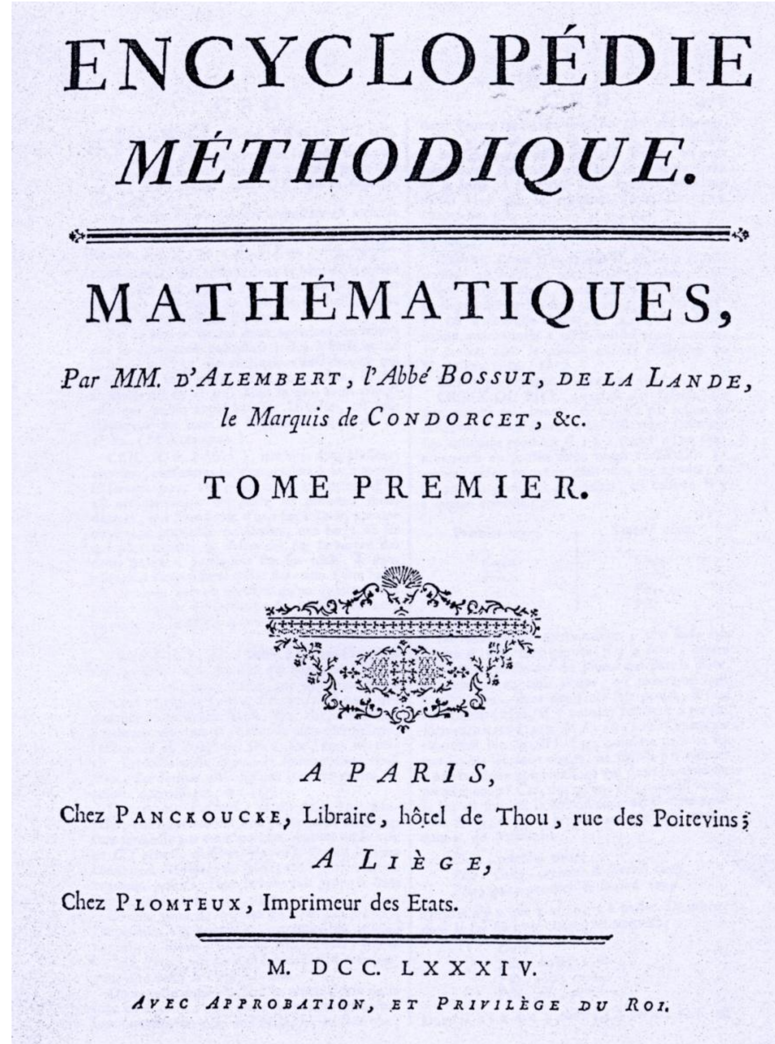
2. Wherefore, if we conſtitute a Fraction whereof the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denominator the number of all the Chances whereby it may either happen or fail, that Fraction will be a proper deſignation of the Probability

 bability

1. La Probabilité d’un Événement est plus ou moins grande suivant le nombre de Chances par lesquelles il peut arriver, rapporté au nombre total des Chances par lesquelles il peut ou ne peut pas arriver.

2. Ainsi, si on forme **une Fraction dont le Numérateur est le nombre de Chances par lesquelles un Événement peut arriver, et le Dénominateur le nombre de toutes les Chances par lesquelles il peut arriver ou ne pas arriver**, **cette Fraction sera** **une véritable définition** de la probabilité que se produise cet Événement.

2.8 - Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)



ENCYCLOPÉDIE
MÉTHODIQUE.

MATHÉMATIQUES,

Par MM. D'ALEMBERT, *l'Abbé* BOSSUT, DE LA LANDE,
le Marquis de CONDORCET, &c.

TOME PREMIER.

A PARIS,
Chez PANCKOUCKE, Libraire, hôtel de Thou, rue des Poitevins;
A LIÈGE,
Chez PLOMTEUX, Imprimeur des Etats.

M. DCC. LXXXIV.
AVEC APPROBATION, ET PRIVILÈGE DU ROI.

Extrait de la Grande Encyclopédie de Diderot et D'Alembert, 1784

PRO

PROBABILITÉ, *Philosoph. Logiq. Math.* Toute proposition considérée en elle-même est vraie ou fausse; mais relativement à nous, elle peut être certaine; nous pouvons appercevoir plus ou moins les relations qui peuvent être entre deux idées, ou la convenance de l'une avec l'autre, fondée sur certaines conditions qui les lient, & qui, lorsqu'elles nous sont toutes connues, nous donnent la certitude de cette vérité, ou de cette proposition; mais si nous n'en connoissons qu'une partie, nous n'avons alors qu'une simple *probabilité*, qui a d'autant plus de vraisemblance, que nous sommes assurés d'un plus grand nombre de ces conditions. Ce sont elles qui forment les degrés de *probabilité*, dont une juste estime & une exacte mesure feroient le comble de la sagacité & de la prudence.

Début de l'article « Probabilité » dans l'Encyclopédie: en 2 colonnes sur 23 pages

La notion de probabilité concerne a priori nos affirmations dont la vérité est relative à nos connaissances.

Approche déterministe et subjectiviste

Pour conclure son introduction, le Secrétaire de l'Académie Royale des Sciences donne une définition maladroite:

PROBABILITÉ. Nous nous bornerons à donner ici les principes généraux du calcul des *probabilités*, dont on trouve des applications à divers articles.

I.

1. Le principe fondamental de ce calcul peut s'exprimer ainsi.

Soit A un événement, & N un autre événement contradictoire au premier (c'est-à-dire, qui, dans l'hypothèse, ne peut exister en même tems); que n exprime le nombre total des combinaisons également possibles, m celui des combinaisons qui donnent l'événement A, m' celui des combinaisons qui donnent l'événement N.

$\frac{m}{n}$ exprimera la *probabilité* de l'événement A, & $\frac{m'}{n}$ celle de l'événement N. $n = m + m'$.

2.10 - Marie Jean Antoine-Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet (1743-1794)

ÉLÉMENS

DU CALCUL DES PROBABILITÉS,

ET SON APPLICATION AUX JEUX DE HASARD, A LA LOTERIE, ET AUX JUGEMENS DES HOMMES;

PAR FEU M. DE CONDORCET.

AVEC UN DISCOURS SUR LES AVANTAGES DES MATHÉMATIQUES SOCIALES

ET UNE NOTICE SUR M. DE CONDORCET.

Ouvrage dont la publication a été retardée par la mort de l'Auteur, et diverses circonstances, et qui devoit paroître à la suite des LETTRES d'*Euler*, *sur la* PHYSIQUE ET LA PHILOSOPHIE, si connués sous le nom de LETTRES A UNE PRINCESSE D'ALLEMAGNE, dont il publia la dernière édition avec M. *de Lacroix*, Professeur à l'École Polytechnique, en y ajoutant quelques notes, etc.

Prix, 3 fr., et 4 fr. franc de port.

A PARIS,

CHEZ ROYEZ, LIBRAIRE, RUE DE THIONVILLE, AU COIN DE LA RUE DE LODI.

AN XIII — 1805.

Condorcet introduit la définition de la probabilité :

ARTICLE III.

Des principes fondamentaux du calcul des probabilités.

Le calcul des probabilités a pour objet les faits dont la réalité est inconnue.

On cherche d'abord à déterminer le nombre de tous les évènemens également possibles, et il est absolument nécessaire de remonter à ceux auxquels il est permis de supposer cette égale possibilité, sans quoi le calcul déviendroit absolument hypothétique. On cherche ensuite, dans ce nombre d'évènemens également possibles, quel est le nombre de ceux qui remplissent une certaine condition, et on dit que la probabilité d'avoir un évènement qui remplisse cette condition, est exprimé par le second de ces nombres divisé par le premier.

2.11 - Pierre-Simon de Laplace, 1749-1827

Bourgeois, professeur, académicien, citoyen, comte d'empire, puis marquis

« Le hasard n'a donc aucune réalité en lui-même: ce n'est qu'un terme propre à désigner notre ignorance… »

(*Mémoires de mathématiques et de physique présentés par divers savants*, 1773-1776)

« La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à nos connaissances…

…La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité ».

(Introduction à *l'Essai philosophique sur les probabilités*, rédigé de 1795 à 1825).

Dix principes pour fonder le calcul des probabilités

PREMIER PRINCIPE
« Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu est **le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles ».**

DEUXIÈME PRINCIPE
« Mais cela suppose les divers cas également possibles.
S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors **la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable ».**

TROISIEME PRINCIPE : conjonctions d'événements indépendants
« Un des points les plus importants de la Théorie des Probabilités, et celui qui prête le plus aux illusions, est la manière dont les probabilités augmentent ou diminuent par leurs combinaisons mutuelles.
Si les événements sont indépendants les uns des autres, la probabilité de l'existence de leur ensemble est le produit de leurs probabilités particulières.

QUATRIÈME PRINCIPE : probabilités composées
« Quand deux événements dépendent l'un de l'autre, **la probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité du premier événement, par la probabilité que cet événement étant arrivé l'autre arrivera ».**

$$P(A \text{ et } B) = P(A) \times P(B/A)$$

Conclusion de *l'Essai philosophique*

« **Il est remarquable qu'une science qui a commencé par la considération des jeux se soit élevée aux plus importants objets des connaissances humaines**. J'ai rassemblé toutes ces méthodes dans ma *Théorie analytique des Probabilités*... »

« ... On voit par cet Essai que **la théorie des probabilités n'est au fond que le bon sens réduit au calcul : elle fait apprécier avec exactitude, ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte…**

…elle apprend à se garantir des illusions qui souvent nous égarent, on verra qu'**il n'est point de science plus digne de nos méditations, et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique. »**

3 - Remarques sur la définition « classique » :

La probabilité d’un événement dû au hasard est **le rapport du nombre des cas favorables qui réalisent cet événement à celui de tous les cas possibles.**

« **Mais cela suppose les divers cas également possibles** ».
L’équiprobabilité des cas possibles doit donc être postulée. La probabilité pour être définie passe par la notion d’équiprobabilité. Cercle vicieux ?

« S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives... Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable ».

Quelle définition pour la « possibilité » ?

Trois positions épistémologiques:

- Option objectiviste: les symétries du système générateur du hasard considéré engendrent l’équiprobabilité. Urne de Bernoulli.

- Option subjectiviste: dans l’ignorance absolue des conditions de réalisation des issues de l’expérience, ***c’est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence***, le plus raisonnable est de postuler l’équiprobabilité (principe de raison insuffisante).

- Option de la modélisation: les conditions de l’expérience permettent de proposer un modèle d’équiprobabilité dont la pertinence devra être contrôlée.

La définition « classique » correspond à une approche dite « épistémique » de la probabilité (Ian Hacking)

- Elle met en jeu une *appréciation personnelle* ou interpersonnelle sur les effets du hasard concernant des événements à venir. C’est une sorte de *spéculation sur l’avenir* à partir des éléments connus ou supposés, constitutifs du présent.

- La notion de « probabilité » est associée aux notions de « chances », « possibilités », « espérance », « croyance », « crédibilité », « confiance ».

- La définition « classique » repose sur un *postulat ou principe* :

Les événements que l’on peut observer à l’issue d’un processus où le hasard intervient (expérience aléatoire) sont tous réductibles à un système de « cas » (les issues possibles) de mêmes possibilités, ou jugés comme tels (équiprobabilité postulée).

- Cette hypothèse dépend des capacités du sujet à analyser les différents cas et à les considérer comme équivalents du point de vue de leurs possibilités. *Démarche fondamentalement relative au sujet* (épistémique).

4 - Nécessité d’une approche élargie

La définition « classique » ne peut s’appliquer dans la plupart des situations:

« … il est seulement requis d’une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d’autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres… Cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas **et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard.**
(…) Mais qui donc parmi les mortels définira par exemple le nombre de maladies, (…) qui encore recensera les cas innombrables des changements auxquels l’air est soumis chaque jour ? » Jacques Bernoulli, Ars Conjectandi, 1713.

Autres exemples de situations non « classiques » :

Jets d’une punaise, pendule chaotique, générateur de chiffres aléatoires non uniformes…

Ensemble infini des issues possibles :
- Jeu du franc-carreau (probabilités géométriques)
- Paradoxe de Bertrand (quel modèle pour un choix « au hasard » ?)

Pour ponctuer ces remarques, des questions de nature didactique :

Peut-on se limiter au collège et au lycée aux situations où il y a de l’équiprobabilité quelque part ?

Comment élargir cette définition pour atteindre toute la dimension du concept de probabilité ?

5 - Le théorème de Bernoulli :

D'une urne de Bernoulli contenant t boules dont r blanches (fertiles) et s noires (stériles), on tire nt boules avec remises et on compte les boules blanches obtenues (schéma binomial). Bernoulli formule ainsi son théorème :

« On peut concevoir des expériences en un nombre tel qu'il soit plus vraisemblable d'autant de fois que l'on veut que le nombre des observations fertiles soit au nombre de toutes les observations dans un rapport ni plus grand que $\frac{r+1}{t}$, ni plus petit que $\frac{r-1}{t}$ ».

Traduction moderne : Une même expérience aléatoire est répétée un nombre n de fois suffisamment grand. On s'intéresse à la fréquence F_n des issues réalisant un événement donné de probabilité p. Cette situation peut être décrite par le schéma binomial de l'énoncé de Bernoulli, où $p = r/t$; on note $\varepsilon = 1/t$, la précision de l'approximation.

Alors, il y a une probabilité aussi voisine de 1 que l'on veut que l'écart entre la fréquence F_n des issues réalisant l'événement et sa probabilité p soit plus petit que tout ε donné.

Cette fréquence observée F_n peut donc être prise pour estimer la probabilité p,

et cet énoncé explicite la condition de confiance :

$P(F_n - \varepsilon < p < F_n + \varepsilon) > 1 - \alpha$ (1–α est le niveau de confiance)

6 - L'approche fréquentiste :

Elle est dite « objectiviste », liée aux notions de « fréquence », « tendance », « loi des grands nombres », la probabilité serait une mesure objective de l'incertitude.

La définition d'Alfred Renyi (calcul des probabilités, Dunod, 1966) :

« Nous appellerons probabilité d'un événement le nombre autour duquel oscille la fréquence relative de l'événement considéré… »

Ce nombre existe-t-il ? Est-il bien défini ? Est-il unique ? Peut-on toujours le déterminer ?

Renyi précise :

*« … la **théorie mathématique** des probabilités ne s'occupe pas de jugements subjectifs ; elle concerne les probabilités objectives, qui peuvent être mesurées comme des grandeurs physiques ».*

Ceci en vertu du théorème de Bernoulli :

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \alpha > 0$ et $\forall n$ assez grand, $P(F_n - \varepsilon < p < F_n + \varepsilon) > 1 - \alpha$

Ces fréquences observées F_n peuvent donc être prises comme « mesures » à ε près pour estimer la probabilité p de l'événement par l'encadrement de confiance indiqué, avec un risque inférieur à α de se tromper.

7 - Problèmes didactiques posés par l'énoncé du théorème

Dans la formule $P(|F_n - p| < \varepsilon) > 1 - \alpha$, il y a deux sortes de probabilités:

- p qui est introduite à partir d'un modèle d'urne par la définition « classique ».

- P qui traduit un risque (celui de se tromper en disant que p est dans l'intervalle de confiance). Cette probabilité n'est pas de même nature que la probabilité « objective » p. relève-t-elle aussi d'une approche fréquentiste ?

- Combien faut-il faire d'expériences réellement pour garantir cette mesure ?

- Comment faire fonctionner cette définition fréquentiste dans un problème ?

- La définition de Renyi repose sur l'énoncé de Bernoulli qui sera ensuite démontré comme théorème. Cercle vicieux ?

La définition « fréquentiste » confond deux domaines qu'il faut pourtant bien séparer :

- le domaine de la réalité où l'on observe les fréquences F_n de réalisations d'un événement au cours de n répétitions d'une même expérience aléatoire,

- le domaine théorique (mathématique) où les objets sont définis abstraitement.

Renyi explique: ***La «définition» de la probabilité comme valeur autour de laquelle oscille la fréquence relative n'est pas une définition mathématique mais une description du substrat concret du concept de probabilité.***

Alors, quelle est la « définition mathématique » ?

8 - L'adaptation des programmes des lycées

La loi des grands nombres joue donc un rôle essentiel pour relier la définition élémentaire a priori de la probabilité (nb cas favorables / nb cas possibles) à l'observation de la stabilisation des fréquences qui, justifiant expérimentalement les inférences, permet les applications à la statistique.

Le programme de première de 1990 proposait d'introduire la notion de probabilité sur cette observation. La probabilité d'un événement est alors définie comme ***la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent*.**

Le programme de première de 2001 propose d'introduire le concept de (loi) de probabilité par ses propriétés théoriques, calquées sur les propriétés des (distributions) de fréquences: ***famille de nombres compris entre 0 et 1, de somme 1.***

On se rapproche ainsi de la « définition mathématique », dans le cas discret fini et on relie ce concept à l'observation expérimentale (les fluctuations d'échantillonnage) par un énoncé « vulgarisé » de la loi des grands nombres :

« ***Pour une expérience aléatoire donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences obtenues sur des séries de taille n sont proches de P quand n est grand*** ».

9 - Conclusion I : dualité incontournable de la notion de probabilité

Cette notion a donc deux visages :

- Une valeur a priori correspondant à l’idée de « chance », calculable quand il y a de l’équiprobabilité quelque part,

- Une mesure expérimentale obtenue par l’observation d’une fréquence stabilisée.

Ces deux visages sont inséparables si l’on veut maîtriser cette notion au niveau de ses applications concrètes.

S’en tenir à la première approche conduit au biais cardinaliste et à l’abus de la combinatoire (échec massif de cet enseignement).

La seconde, par sa nature empirique, est, à elle seule, impropre pour développer une théorie scientifique (tentative avortée d’axiomatisation de Von Mises en 1928).

Quels choix pour l’enseignement secondaire ?