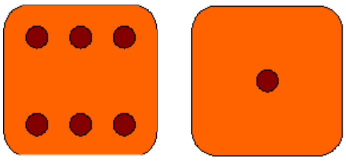
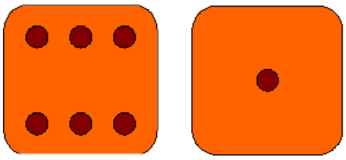
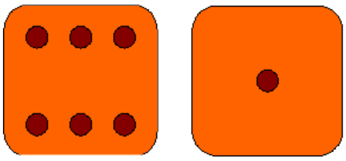
VII. DE TOUT… AU HASARD



Des dés et des polynômes



Autour du jeu de l'oie



Un jeu pas si équilibré que çà

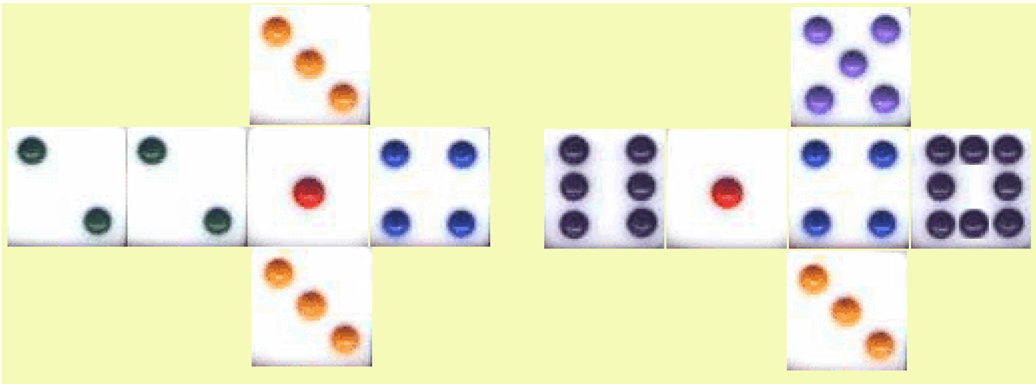
DES DES ET DES POLYNOMES

Les dés de Sicherman

Lorsque l'on lance deux dés cubiques normaux et que l'on calcule la somme des points on obtient une variable aléatoire dont la loi est :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Sicherman a proposé d'utiliser deux dés dont les faces portent respectivement les nombres de points suivant 1, 2, 2, 3, 3 et 4 pour le premier, 1, 3, 4, 5, 6 et 8 pour le second.



Lorsque l'on lance ces deux dés pour faire la somme des points, les 36 résultats équiprobables sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	1	2	2	3	3	4
1	1	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

Et la loi de probabilité de la variable aléatoire somme des points est la même que pour deux dés ordinaires.
Cela nous amène, en particulier, à poser deux problèmes :

1) Existe-t-il d'autres manières de numéroter les faces de deux dés cubiques pour qu'en les lançant ensemble on obtienne pour la somme des points la même loi de probabilité qu'en lançant deux dés ordinaires ?
2) Existe-t-il une manière de numéroter les faces de deux dés cubiques pour qu'en les lançant ensemble on obtienne pour la somme des points la loi équiprobable sur 2,…,12 ?

Polynôme générateur d'une variable aléatoire

Pour répondre aux deux questions ci-dessus nous allons associer à toute variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs entières un polynôme.
Par exemple :
Le nombre de points obtenus lorsqu'on lance un dé cubique normal est une variable aléatoire X dont la loi est bien connue :

Points	1	2	3	4	5	6
Probabilités	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Associons à cette variable aléatoire le polynôme :

$$P(x)=\frac{1}{6}x^1+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{6}x^6.$$

dans lequel les exposants sont les valeurs de la variable aléatoire et les coefficients les probabilités correspondantes.
Plus généralement, si X est une variable aléatoire de loi :

Valeurs	a_1	a_2	$\cdots$	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
Probabilités	p_1	p_2	$\cdots$	$\cdots$	p_{n-1}	p_n

On lui associe le polynôme $P(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i x^{a_i}$. Nous dirons que $P(x)$ est le polynôme générateur de la variable aléatoire X.

Lorsqu'on multiplie deux polynômes, les exposants (valeurs des variables aléatoires) s'ajoutent et les coefficients (probabilités) se multiplient. On constate donc que le polynôme générateur de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est le produit des deux polynômes générateurs.

Polynôme générateur d'un dé cubique
A quelles conditions un polynôme peut-il être le polynôme générateur de la variable aléatoire associée à un dé cubique dont les 6 faces portent chacune un nombre entier de points ?
Les coefficients sont tous positifs ou nuls et de somme 1 (condition nécessaire pour tout polynôme générateur)
Chaque coefficient est égal à un nombre entier de sixièmes (entre 0 et 6/6) car chaque valeur est présente sur un certain nombre de faces du dé.

Factorisation des polynômes générateurs correspondants aux deux situations décrites ci-dessus.
Le polynôme générateur de la variable aléatoire somme des points pour deux dés normaux :

$$P(x)=\frac{1}{36}x^2+\frac{2}{36}x^3+\frac{3}{36}x^4+\frac{4}{36}x^5+\frac{5}{36}x^6+\frac{6}{36}x^7+\frac{5}{36}x^8+\frac{4}{36}x^9+\frac{3}{36}x^{10}+\frac{2}{36}x^{11}+\frac{1}{36}x^{12}$$

a pour factorisation (rationnelle) :

$$P(x)=\frac{1}{36}x^2(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)^2\left(x^2-x+1\right)^2$$

dont les facteurs s'associent d'une seule manière en produit de deux polynômes générateurs de dés :

$$P(x)=\frac{1}{6}\left(x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x\right)\frac{1}{6}\left(x^4+2x^3+2x^2+x\right)$$

Cette factorisation correspond bien aux deux dés proposés par Sicherman.
Les dés de Sicherman sont donc les seuls qui se comportent comme deux dés normaux lorsqu'on fait la somme des points obtenus.

Pour examiner la possibilité d'obtenir l'équiprobabilité sur 2,…,12 en utilisant deux dés cubiques, il faut tenter de factoriser le polynôme :

$$E(x)=\frac{1}{11}\left(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12}\right)$$

dont la seule factorisation rationnelle est

$$E(x)=\frac{1}{11}x^2\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}\right)$$

Avant même d'examiner cette factorisation, on pouvait prévoir que la constante $\frac{1}{11}$ ne saurait se factoriser en sixièmes.
Il n'y a donc aucune manière de numéroter les faces de deux cubiques pour que la somme des points obtenus ait pour loi l'équiprobabilité sur 2,…,12.

Les remarques précédentes peuvent donner l'idée de rechercher des polynômes dont les coefficients sont des multiples entiers de $\frac{1}{36}$.
Quelques essais nous ont permis de découvrir :

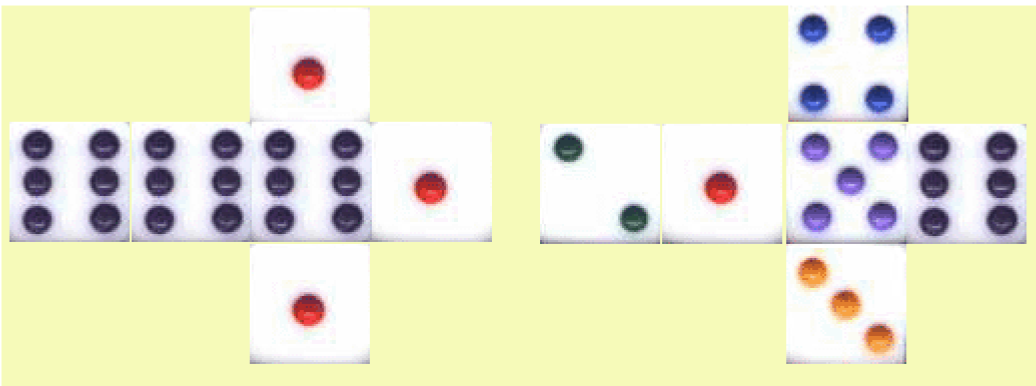
Des sommes de 2 à 12 presque toutes équiprobables

$$Q(x)=\frac{3}{36}x^2+\frac{3}{36}x^3+\frac{3}{36}x^4+\frac{3}{36}x^5+\frac{3}{36}x^6+\frac{6}{36}x^7+\frac{3}{36}x^8+\frac{3}{36}x^9+\frac{3}{36}x^{10}+\frac{3}{36}x^{11}+\frac{3}{36}x^{12}$$

qui se factorise :

$$Q(x)=\frac{1}{6}\left(3x^6+3x\right)\frac{1}{6}\left(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x\right)$$

Ce qui montre qu'en utilisant un dé ordinaire et un dé dont trois faces sont numérotées 6 et les trois autres 1, on obtient des sommes de 2 à 12 et seule la somme 7 aura une probabilité double de celles des autres.



L’impossible tirage au hasard d’un chiffre
La même technique permet de montrer qu’avec deux dés cubiques il sera impossible d’obtenir l’équiprobabilité sur 0, 1,…,9 c'est-à-dire le tirage au hasard d’un chiffre.

Un dé à neuf faces équiprobables
Pour l’équiprobabilité sur 1, 2, 3…9 il existe une factorisation exploitable du polynôme générateur :

$$H(x) = \frac{4}{36}\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9\right)$$
$$= \frac{2}{6}\left(x^3 + x^2 + x\right)\frac{2}{6}\left(x^6 + x^3 + 1\right)$$

qui permet de montrer que lancer ensemble deux dés dont les faces portent respectivement 3,3,2,2,1,1 et 6,6,3,3,0,0 équivaut au tirage au hasard d’un entier entre 1 et 9, un dé à neuf faces équiprobables en quelque sorte.

Un dé à 18 faces équiprobables
Là encore une factorisation du polynôme générateur permet de trouver une solution intéressante :

$$K(x) = \frac{2}{36}\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18}\right)$$
$$= \frac{2}{6}\left(x^{12} + x^6 + 1\right)\frac{1}{6}\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)$$

Un dé « ordinaire » et un dé dont les faces portent 12, 12, 6, 6, 0, 0 donneront pour somme un entier de 1 à 18 avec équiprobabilité.

AUTOUR DU JEU DE L'OIE

La case 58 fatale !

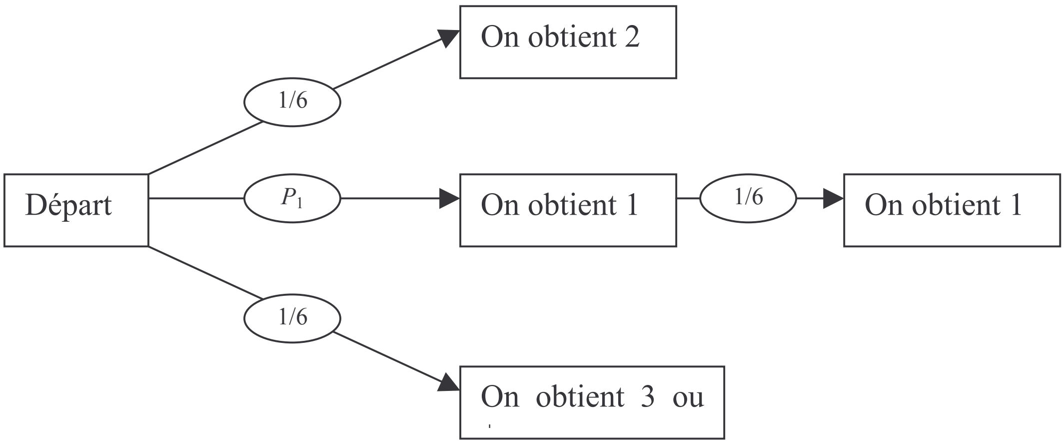
Au jeu de l'oie les joueurs déplacent des pions sur un plateau comportant 63 cases en lançant un dé cubique standard. Malheur à celui qui tombera sur la case n°58 car il devra se replacer sur la case départ. Mais au fait, quelle est la probabilité de tomber sur cette case fatale ?

Étude asymptotique
Imaginons que le plateau de jeu comporte un nombre infini de case. Soit p_n la probabilité de passer par la case n. Étant donné que le nombre moyen de cases parcourues à chaque lancer de dé tend vers $\frac{7}{2}$ (espérance du nombre de points obtenu avec un dé), si p_n admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ alors cette limite est $\frac{2}{7}$.

Formule de récurrence
Pour n entier naturel non nul, notons A_n l'événement "tomber sur la case n" et $p_n = P(A_n)$.
Calcul de p_i, pour $i \leq 6$:

On a $$p_1 = \frac{1}{6} \approx 0{,}167 .$$

Pour le calcul de p_2 on peut visualiser la situation par un arbre :



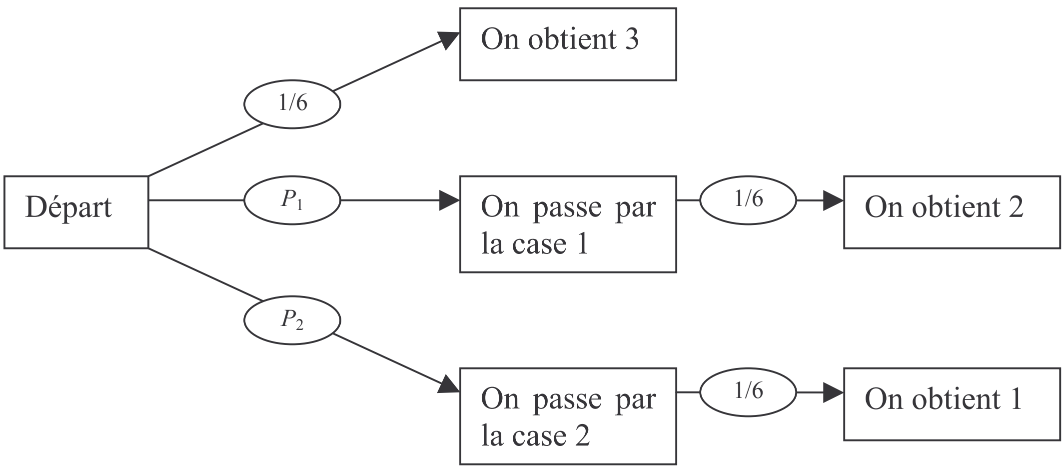
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales $p_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} p_1 = \frac{7}{36} \approx 0{,}194$.

De même, il y a trois manières d'arriver sur la case 3 :

- Directement en lançant 3.
- Passer par la case 1 et lancer 2.
- Passer par la case 2 et lancer 1.

On trouve cette fois $p_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} p_1 + \frac{1}{6} p_2 = \frac{49}{216} \approx 0{,}227$.

Le calcul est illustré par l'arbre suivant.



Des raisonnements analogues nous donnerons successivement :

$$p_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}p_3 = \frac{343}{1296} \approx 0{,}265\,.$$

$$p_5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}p_3 + \frac{1}{6}p_4 = \frac{2401}{7776} \approx 0{,}309\,.$$

$$p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}p_3 + \frac{1}{6}p_4 + \frac{1}{6}p_5 = \frac{16807}{46656} \approx 0{,}360\,.$$

On peut remarquer que les six premiers termes de (p_n) sont ceux d'une suite géométrique de raison $\frac{7}{6}$.

En effet : $p_{n+1} = p_n + \frac{1}{6}p_n = \frac{7}{6}p_n$ pour $n \leq 5$ et donc $p_n = \frac{1}{6} \times \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$ pour $1 \leq n \leq 6$.

On pourra consulter en annexe 1 une autre manière d'aborder le problème.

Calcul de p_n, pour $n \geq 7$

A_n est la réunion disjointe des événements $A_n \cap A_{n-1}$, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n où :
B_n est l'événement : "on était sur la case n-2 et on a obtenu un 2".
C_n est l'événement : "on était sur la case n-3 et on a obtenu un 3"
D_n est l'événement : "on était sur la case n-4 et on a obtenu un 4"
E_n est l'événement : "on était sur la case n-5 et on a obtenu un 5"
F_n est l'événement : "on était sur la case n-6 et on a obtenu un 6"

La formule des probabilités totales nous donne alors :

$$p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}p_{n-2} + \frac{1}{6}p_{n-3} + \frac{1}{6}p_{n-4} + \frac{1}{6}p_{n-5} + \frac{1}{6}p_{n-6}\,.$$

En particulier, on trouve :

$$p_7 = \frac{1}{6} \times \left(\left(\frac{7}{6}\right)^6 - 1\right).$$

Pour le calcul effectif de p_n avec $n \geq 8$, on peut éventuellement remarquer que

$$p_n - p_{n-1} = \frac{1}{6}(p_{n-1} - p_{n-7})$$

et donc que

$$p_n = \frac{7}{6}p_{n-1} - \frac{1}{6}p_{n-7}\,.$$

Voici un tableau de valeurs approchées des premiers termes de (p_n)

1	0.16666	11	0.29339	21	0.28596
2	0.19444	12	0.29083	22	0.28594
3	0.22685	13	0.27926	23	0.28575
4	0.26466	14	0.28353	24	0.28559
5	0.30877	15	0.28611	25	0.28559
6	0.36023	16	0.28707	26	0.28574
7	0.25360	17	0.28670	27	0.28576
8	0.26809	18	0.28558	28	0.28573
9	0.28036	19	0.28471	29	0.28570
10	0.28928	20	0.28562	30	0.28569

En poursuivant ce calcul, on constate que p_{58} est une valeur approchée de $\frac{2}{7}$ avec une précision de l'ordre de 10^{-9}.

Convergence de (p_n)

Les résultats concernant les suites récurrentes linéaires nous permettent de démontrer que la suite (p_n) converge.

Le polynôme caractéristique de la suite (p_n) est :

$$P(X) = X^6 - \frac{1}{6}\left(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1\right).$$

Une de ses racines est 1 et les autres, dont a priori on ne peut que déterminer des valeurs approchées, sont en module strictement inférieures à 1.

En effet si λ est une racine avec $|\lambda| > 1$, on a $|\lambda|^6 = \frac{1}{6}\left|\lambda^5 + \lambda^4 + ... + 1\right| < \frac{1}{6}\left(|\lambda|^5 + ... + 1\right) \leq |\lambda|^5$

C'est-à-dire $|\lambda|^6 \leq |\lambda|^5$ et il y a contradiction.

D'autre part, on vérifie sans trop de problème que le polynôme caractéristique est premier avec son polynôme dérivé (par exemple, à l'aide de l'algorithme d'Euclide) ce qui prouve que les racines $\{1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$ de $P(X)$ sont toutes simples et nous montre que p_n peut s'écrire sous la forme :

$$p_n = a + b\lambda_1{}^n + c\lambda_2{}^n + ... + f\lambda_5{}^n.$$

On en déduit que (p_n) converge vers a. Comme l'étude asymptotique nous a montré que la seule limite possible de (p_n) est $\frac{2}{7}$, on en déduit que $a = \frac{2}{7}$.

Pour estimer la rapidité de convergence, on peut vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul que les modules des valeurs propres autres que 1 sont majorés par 0,74. Comme 0.74^{58} est de l'ordre de 10^{-8} cela reste cohérent avec la précision observée au paragraphe précédent.

Autre démonstration de la convergence

Utilisons le fait que p_{n+6} est la moyenne (l'isobarycentre) de $\{p_n ;\ldots; p_{n+5}\}$.

Soit m_n et M_n les minimum et maximum de $\{p_n ; p_{n+1}\ldots; p_{n+5}\}$.

Comme $p_{n+6} \in [m_n ; M_n]$, on en déduit que (m_n) est croissante et que (M_n) est décroissante (au sens large). Ces deux suites étant bornées, elles convergent vers m et M avec $m \leq M$.

Supposons que $m < M$. Pour $\varepsilon>0$ il existe un entier n_0 à partir duquel

$$m - \varepsilon < m_n \leq p_n \leq M_n < M + \varepsilon.$$

Comme p_{n+6} est la moyenne de six nombres dont le plus grand est M_n et dont les cinq autres sont minorés par m_n on a :

$$\frac{5}{6}m_n + \frac{1}{6}M_n \leq p_{n+6}.$$

Mais alors pour $n \geq n_0$, on a

$$\frac{5}{6}(m - \varepsilon) + \frac{1}{6}M \leq \frac{5}{6}m_n + \frac{1}{6}M_n \leq p_{n+6}$$

Cette dernière inégalité est vérifiée en particulier pour $p_{n_0+6}, \ldots p_{n_0+11}$ donc pour le plus petit d'entre eux, m_{n_0+6} :

$$\frac{5}{6}(m-\varepsilon)+\frac{1}{6}M < m_{n_0+6} \leq m\,,$$

dont on tire

$$5m - 5\varepsilon + M \; < \; 6m$$

et finalement

$$M - m < 5\varepsilon\,.$$

La dernière inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $m = M$ et que la suite (p_n) converge vers cette limite commune qui d'après l'étude asymptotique est $\frac{2}{7}$.

Généralisation à d'autres types de dés

Sous certaines réserves exprimées plus loin le problème reste le même quelque soit le type de dés utilisés pour se déplacer. Examinons tout d'abord trois cas particuliers avant de préciser les hypothèses et de démontrer les résultats avancés.

Exemple 1 : Lancer de deux dés équilibrés.

Un lancer de deux dés peut être considéré comme le lancer d'un seul dé non équilibré à onze faces (de 2 à 12). Dans ce cas le nombre moyen de cases parcourues à chaque lancer est 7 et (p_n) va tendre vers $\frac{1}{7}$.

Exemple 2 : Lancer d'un dé équilibré comportant deux faces marquées d'un 2, deux faces marquées d'un 4 et deux faces marquées d'un 6.

Cette fois on voit que les cases portant un numéro impair ne peuvent pas être atteintes. Par contre la suite (p_{2n}) tend vers $\frac{1}{3}$. Ce résultat se démontrerait de la même manière que les autres après avoir " gommé " les cases portant un numéro impair.

Cette situation se généralise à tous les cas où le PGCD des nombres portés par les faces du dé est différent de 1.

Exemple 3 : Lancer d'un autre " dé ".

Considérons un dé cubique équilibré dont les faces porteraient les nombres 6, 6, 6, 10, 10 et 15. Nous sommes donc dans une situation où le PGCD est égal à 1.

Certaines des premières cases du plateau ne peuvent pas être atteintes en lançant un tel dé. Plus précisément la case n pourra être atteinte s'il existe un triplet d'entiers naturels (a, b, c) tel que $n = 6a + 10b + 15c$.

En fait, la case numéro 29 est la dernière des cases qui ne peut pas être atteinte. En effet 29 ne peut pas être obtenu sous la forme $6a + 10b + 15c$ avec a, b, c entiers naturels mais pour les six nombres suivants on vérifie que :

$30 = 5 \times 6$ (la case 30 est atteinte si on obtient, entre autres, 5 fois un 6);
$31 = 6 + 10 + 15$,
$32 = 2 \times 6 + 2 \times 10$,
$33 = 3 \times 6 + 15$,
$34 = 6 \times 4 + 10$ et
$35 = 2 \times 10 + 15$.

Enfin tout nombre M supérieur ou égal à 36 pourra s'écrire sous la forme $N + 6K$ avec N et K entiers naturels et $30 \leq N \leq 35$. Ainsi la case M pourra en particulier être atteinte en passant par la case N puis en réalisant K fois un 6.

Par ailleurs, l'espérance mathématique de la variable aléatoire associée à ce dé est :

$$E(X) = \frac{1}{6}(6 + 6 + 6 + 10 + 10 + 15) = \frac{53}{6}.$$

Ce résultat correspond au nombre moyen de cases parcourues à chaque lancer et (p_n) converge vers $\frac{6}{53} \approx 0{,}1132$.

Cas général

Considérons plus généralement un dé à k faces portant des entiers naturels premiers dans leur ensemble notés $d_1,\dots,d_k$ rangés en ordre croissant, et tels que $q_i = P(D = d_i) \neq 0$. Montrons tout d'abord que toutes les cases du plateau peuvent être atteintes, excepté certaines des premières. Ceci revient à montrer qu'il existe une suite de d_1 entiers consécutifs qui peuvent tous s'écrire comme somme d'éléments de $\{d_1,\dots,d_k\}$.

Démonstration

Comme $\{d_1,\dots,d_k\}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, il existe $(x_1;\dots;x_k)$ tel que $\sum_{j=1}^{k} x_j d_j = 1$. Posons $n = \sum_{j=1}^{k} x d_1 d_j$ avec $x = -\inf(x_j)$. Alors pour tout i tel que $0 \leq i \leq d_1$, on a $n + i = \sum_{j=1}^{k} x d_1 d_j + i \sum_{j=1}^{k} x_j d_j = \sum_{j=1}^{k} (x d_1 + i x_j) d_j$.

Comme $d_1 \geq i$ et que $x \geq -x_j$, dans cette dernière somme les coefficients des d_j sont tous positifs et ainsi les $(d_1 + 1)$ nombres $(n + i)$ peuvent tous s'écrire comme somme d'éléments de $\{d_1,\dots,d_k\}$. Notons tout de même que ce n'est pas, en général, la plus petite suite d'entiers réalisant cette condition.

Étude de la convergence

Dans les conditions énoncées plus haut, on sait que la probabilité p_n d'atteindre la case n est strictement positive dès que n est suffisamment grand. Notons D la variable aléatoire associée à notre dé. Le nombre moyen de cases parcourues à chaque lancer de dé est alors $E(D) = \sum_{i=1}^{k} q_i d_i = m$ et si (p_n) converge sa limite sera $\frac{1}{m}$.

Pour $n > d_k$, A_n est la réunion disjointe des événements $A_{n-d_i} \cap (D = d_i)$ et ainsi :

$$p_n = \sum_{i=1}^{k} q_i p_{n-d_i} .$$

Le polynôme caractéristique est cette fois $P(x) = x^{d_k} - \sum_{j=1}^{k} q_j x^{d_k - d_j}$.

A nouveau, comme dans le cas étudié plus haut, 1 est une racine.

Soit λ une autre racine. Si $|\lambda| > 1$,

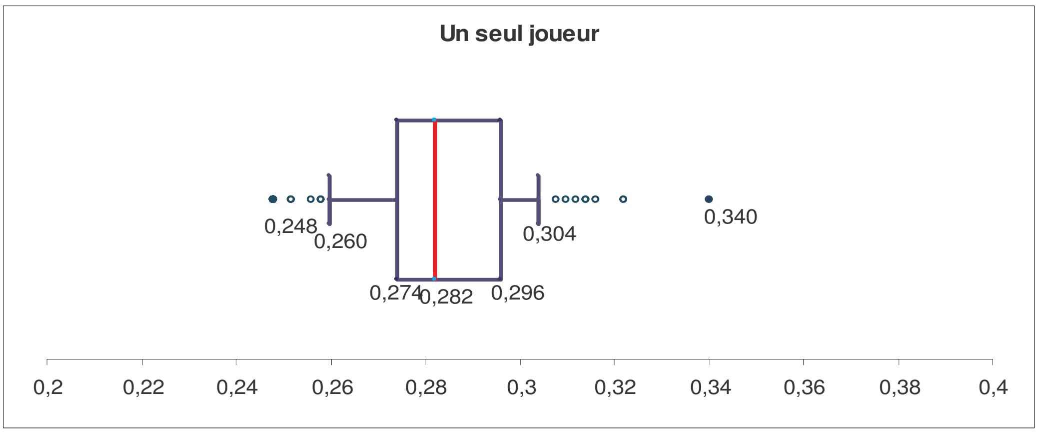
$$|\lambda|^{d_k} = \left| \sum_{j=1}^{k} q_j \lambda^{d_k - d_j} \right| \leq \sum_{j=1}^{k} q_j |\lambda|^{d_k - d_j} \leq |\lambda|^{d_k - d_1} \sum_{j=1}^{n} q_j \leq |\lambda|^{d_k - d_1},$$

qui est contradictoire avec $|\lambda| > 1$. On en déduit que $|\lambda| \leq 1$.

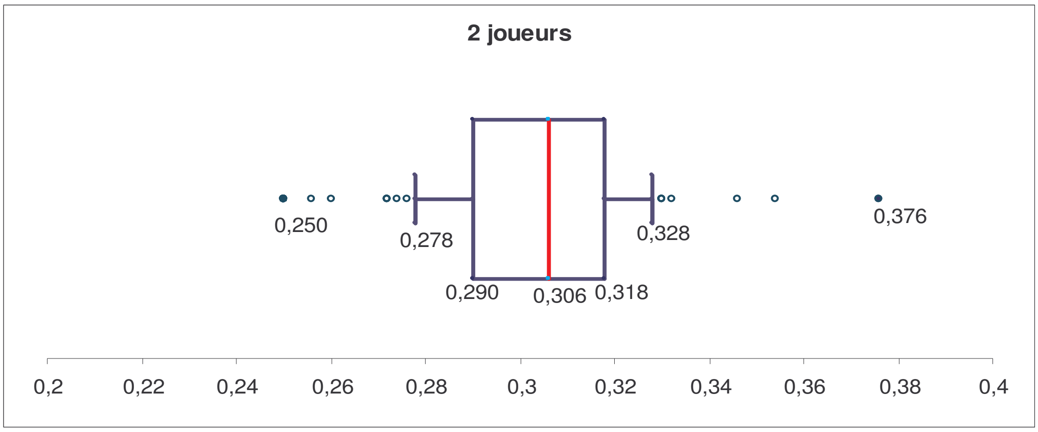
Supposons que $|\lambda| = 1$. Alors, $1 = |\lambda|^{d_k} = \left| \sum_{j=1}^{k} q_j \lambda^{d_k - d_j} \right| \leq \sum_{j=1}^{k} q_j |\lambda|^{d_k - d_j} = 1$. L'inégalité précédente est donc une égalité, ce qui implique que pour tout j , l'argument de $\lambda^{d_k - d_j}$ est constant (c'est donc celui de $\lambda^{d_k - d_k} = 1$). Ainsi pour tout j , $\lambda^{d_k - d_j} = 1$ et donc $\lambda^{d_k} = \lambda^{d_j}$. De plus $0 = P(\lambda) = \lambda^{d_k} - \sum_{j=1}^{k} q_j$ et donc $\lambda^{d_k} = 1$. λ est racine (d_j-ème) de l'unité pour tout j. Mais comme $\{d_1,\ldots,d_k\}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble $\lambda = 1$. Ainsi la seule racine de module 1 est 1. On vérifie que le polynôme dérivé ne s'annule pas en 1 car $P'(1) = d_k - \sum_{j=1}^{k} (d_k - d_j) q_j = \sum_{j=1}^{k} d_j q_j$. Ceci a pour conséquence que 1 est racine simple et donc que (p_n) est bien une suite convergente.

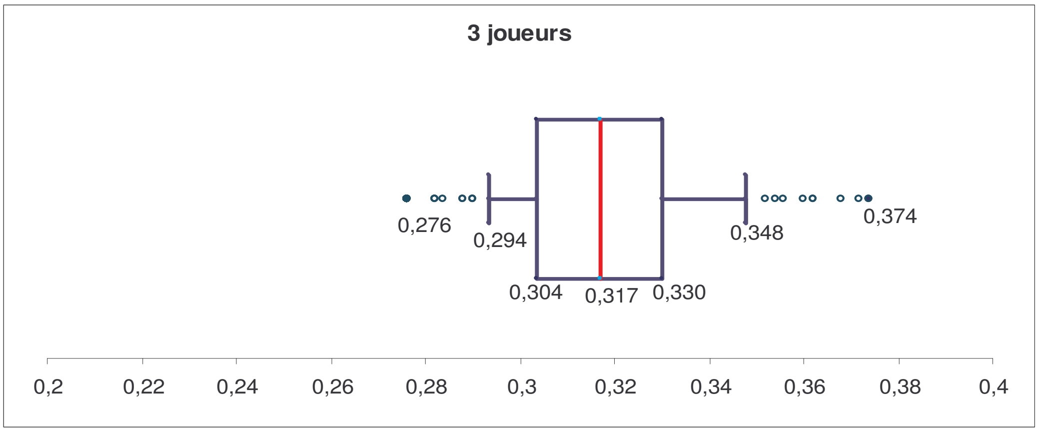
Pour terminer, détaillons cette étude dans le cas de l'exemple 3.
Ici $k = 3$. $d_1 = 6$, $d_2 = 10$, $d_3 = 15$, $q_1 = \frac{1}{2} = p_6$, $q_2 = \frac{1}{3} = p_{10}$, $q_3 = \frac{1}{6} = p_{15}$.
$p_{12} = \frac{1}{4}$ (obtenir deux fois de suite 6). Les autres valeurs de p_n pour $n < 15$ sont nulles et pour $n > 15$ on a $p_n = \frac{1}{2} p_{n-6} + \frac{1}{3} p_{n-10} + \frac{1}{6} p_{n-15}$.
Le calcul nous permet de constater que pour $n \geq 132$: $\left| p_n - \frac{6}{53} \right| < 10^{-3}$
Le fichier EXCEL "dé à 3 faces.XLS" fournit un tableau de valeurs et une simulation.

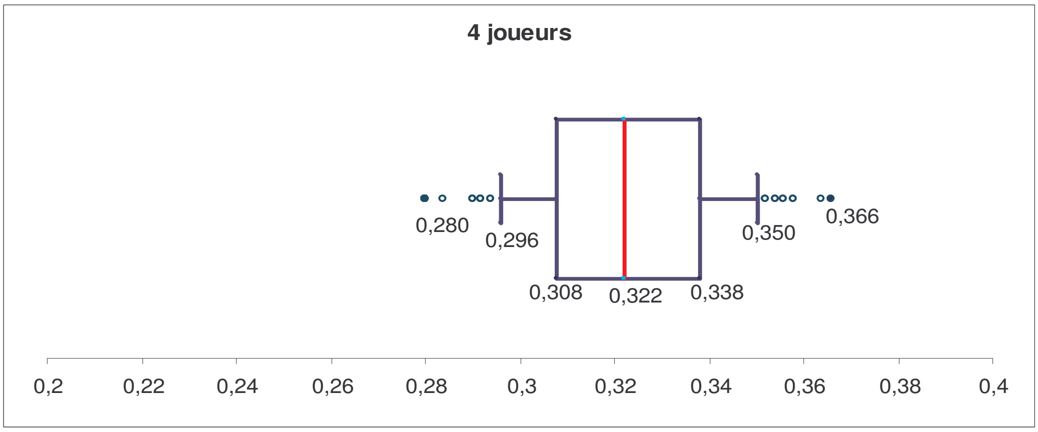
Jouons à plusieurs
Supposons que l'on joue à plusieurs et que le jeu s'arrête dès qu'un joueur atteint ou dépasse la case 58. On note p_{58} la probabilité qu'un des joueurs tombe sur la case 58. A priori, le calcul de p_{58} n'est pas simple. Explorons cette situation par des simulations.
Considérons d'abord le cas d'un seul joueur : Nous pouvons dans un premier temps simuler 500 parties et compter le nombre de ces parties où le joueur passe par la case 58. Un calcul de fréquence doit nous donner un nombre proche de $\frac{2}{7}$. En réalisant 100 fois cette simulation nous obtenons la boîte à moustache suivante :



En procédant de même avec 2, 3 et 4 joueurs nous obtenons cette fois :







On pourra se référer au fichier "case58 à 3 joueurs avec commentaires.xls" pour plus de précision sur la simulation.
Pour terminer voici le résultat d'une simulation portant sur 1000 parties avec un nombre n de joueurs tel que $1 \leq n \leq 20$. Dans le tableau figure le nombre N de parties où un joueur tombe sur la case 58

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	286	328	323	316	323	341	315	320	321	333
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N	345	342	352	360	317	349	377	366	361	379

Malgré les quelques irrégularités, on peut conjecturer que N croît avec n mais ceci reste à démontrer.

Annexe 1 : Un autre procédé de calcul de p_i, pour $i \leq 6$
Pour ce calcul, on peut s'intéresser au problème plus général de la décomposition d'un entier en somme d'entiers :

De combien de manière peut-on décomposer un entier non nul n en somme de k entiers non nuls en tenant compte de l'ordre ?

Notons $f(k;n)$ ce nombre.

On trouve par exemple que $f(3;5)=6$ car 5 est somme des 6 triplets suivants: (3;1;1); (1;3;1); (1;1;3); (2;2;1); (2;1;2) et (1;2;2).

Plus généralement :

- Si $k>n$ alors $f(k;n)=0$.

- $f(n;n)=1$ et $f(1;n)=1$, pour tout n est en particulier pour $n = 2$.

- Pour $k \leq n$; on a $f(k+1;n+1)=f(k;n)+f(k+1;n)$. En effet les ($k$+1)-uplets de somme n+1, $(a_1;...;a_{k+1})$ sont de deux types différents:
  *ceux pour lesquels $a_{k+1} = 1$ à qui on associe bijectivement les k-uplets $(a_1;.....;a_k)$ de somme n. Il y en a donc $f(k;n)$.
  ** ceux pour lesquels $a_{k+1} > 1$ à qui on associe bijectivement les (k+1)-uplets de somme n $(a_1;...;a_k;a_{k+1}-1)$. Il y en a donc $f(k+1;n)$.

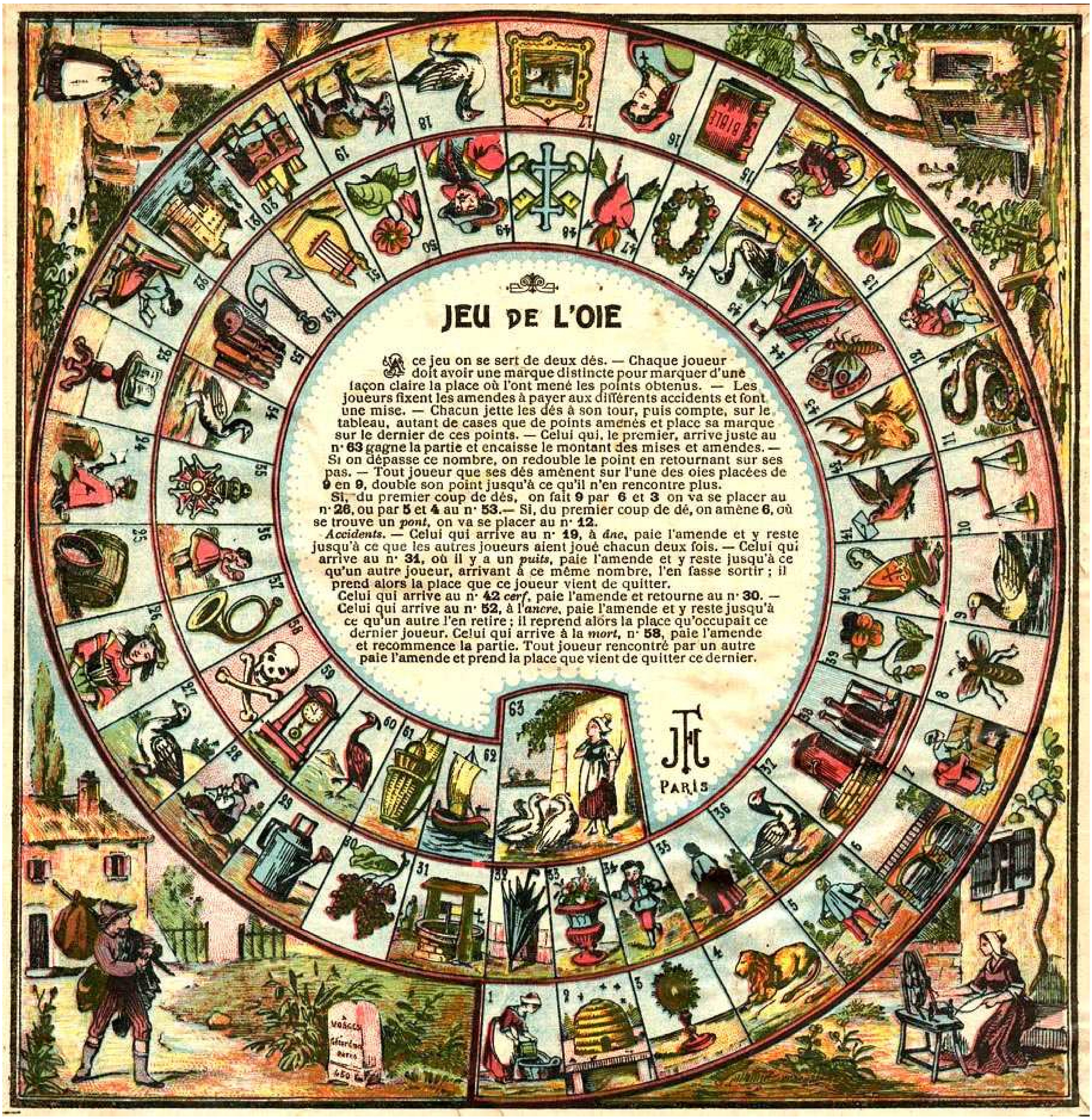
Cette dernière relation associée avec $f(1;2)=f(2;2)=1$ montre que pour tout k et n entiers,

$$f(k;n)=\binom{n-1}{k-1}.$$

Ainsi on passera par la case i ($i \leq 6$) avec la probabilité :

$$p_i=\sum_{k=1}^{i} f(k;i)\left(\frac{1}{6}\right)^k=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{i}\binom{i-1}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{6}\right)^{i-1}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{7}{6}\right)^{i-1}$$

Annexe 2 : Le plateau d'un vrai jeu de l'oie traditionnel



UN JEU PAS SI EQUILIBRE QUE ÇA !

Ce petit futé d'Alain a réussi à convaincre Bernard de jouer avec lui.
"*Ce n'est pas compliqué, chacun d'entre nous choisit un nombre entier ; si les deux sont pairs, je te dois 3€, si les deux sont impairs, je t'en dois un, enfin s'ils n'ont pas la même parité tu me donne 2 €.*"
Au début Bernard, sûr de gagner deux fois sur trois se laisse convaincre mais révise rapidement son jugement suite aux premières parties dont le bilan est globalement négatif.
Une analyse un peu plus fine pourrait lui faire croire que le jeu est équilibré. En effet, on peut représenter la situation par le tableau :

	Pair	Impair
Pair	+3	-2
Impair	-2	+1

Deux fois sur quatre on perd 2€, une fois sur quatre on en gagne 3 et une fois sur quatre on en gagne un. Comme $\frac{2}{4} \times 2 - \frac{1}{4} \times 3 - \frac{1}{4} \times 1 = 0$, le jeu est bien équilibré.
Ce n'est malheureusement pas avec ce type d'argument que Bernard regagnera de quoi emmener sa petite amie au cinéma comme nous allons le voir par la suite.

Une surface à notre secours
En réalité, le calcul présenté est celui de l'espérance de gain de Bernard dans le cas où chacun des deux joueurs choisit Pair ou Impair de manière équiprobable. Il n'en sera plus de même si l'un ou les deux joueurs adoptent une stratégie différente.

Plaçons nous tout d'abord dans le cas où Alain joue Pair une fois sur deux (en lançant une pièce de monnaie pour décider) et Bernard joue Pair avec une probabilité p:

	Pair (p)	Impair (1-p)
Pair (0,5)	+3	-2
Impair (0,5)	-2	+1

Le calcul de l'espérance de gain de Bernard nous donne :

$$3 \times \frac{p}{2} - 2 \times \frac{1-p}{2} - 2 \times \frac{p}{2} + \frac{1-p}{2} = p - \frac{1}{2}.$$

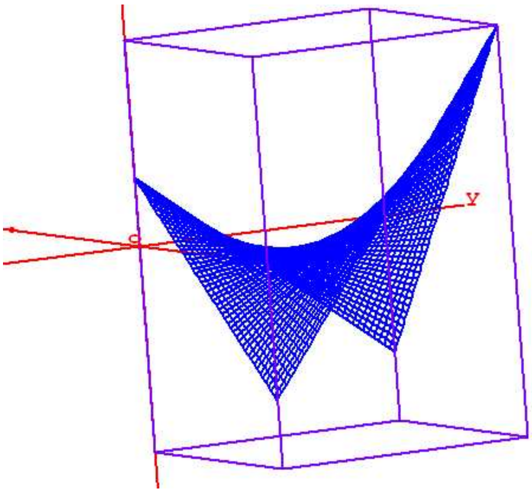
Ainsi Bernard a tout intérêt à jouer plus souvent Pair qu'Impair. On peut remarquer que le problème est symétrique et que si Bernard joue de manière équilibrée, Alain a intérêt à jouer plus souvent Impair. Évidemment ce type de stratégie suppose que l'adversaire ne se rend compte de rien et qu'il n'a pas fait la même analyse que nous.

Que se passe-t-il dans le cas où les deux joueurs modifient simultanément la probabilité de jouer Pair ?

	Pair (p)	Impair (1-p)
Pair (q)	+3	-2
Impair (1-q)	-2	+1

G étant la variable aléatoire qui à une partie associe le gain de Bernard (c'est-à-dire la perte d'Alain), on obtient :

$$E(G) = 3pq - 2\big(p(1-q) + q(1-p)\big) + (1-p)(1-q) = 8pq - 3(p+q) + 1.$$



La représentation ci-contre de la surface (S) d'équation $z = 8xy - 3(x+y) + 1$ avec x et y dans [0;1] peut alors nous éclairer.
Les points de cette surface situés "sous" le plan (Oxy) correspondent à des stratégies mixtes perdantes pour Bernard.
Le choix de ce dernier (la valeur de p) peut être optimisé s'il connaît la valeur de q:

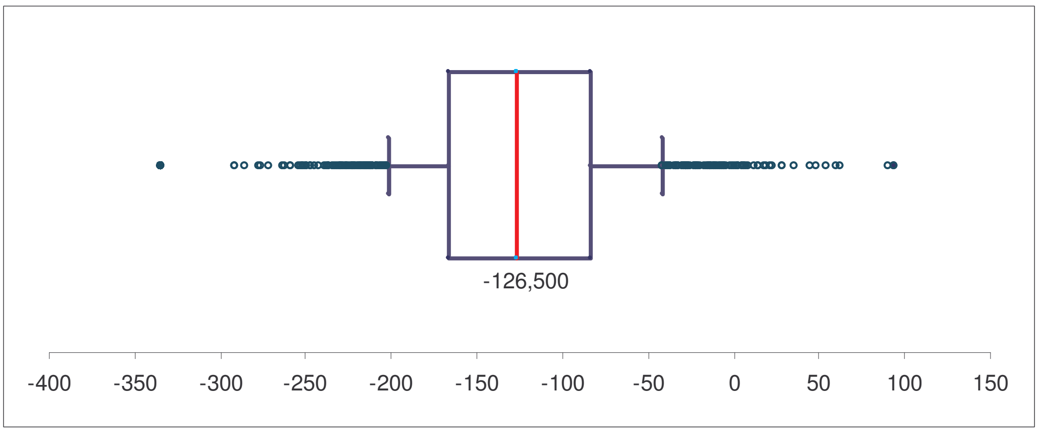
$$E(G) = (8q-3)p + (1-3q) = f_q(p)$$

est fonction affine de p et :

- Si $q > \frac{3}{8}$, f_q est croissante et le maximum (5q-2) est atteint pour $p = 1$.
- Si $q < \frac{3}{8}$, f_q est décroissante et le maximum (1-3q) est atteint pour $p = 0$.
- Si $q = \frac{3}{8}$, f_q est constante avec $f_q(p) = -\frac{1}{8}$.

Dans ce dernier cas, quoi que fasse Bernard, il sera perdant ; ce sera le cas également dès que $\frac{1}{3} < q < \frac{2}{5}$ puisqu'alors le maximum de f_q est négatif. Ces situations s'interprètent graphiquement par le fait que les segments intersection de (S) avec les plans X = q sont entièrement situés sous le plan (Oxy). Au passage, on peut constater que (S) est un morceau de paraboloïde hyperbolique (PH ou « selle de cheval »). On retrouve que le PH est une surface réglée c'est-à-dire engendrée par le déplacement d'une droite dans l'espace.

D'autre part, la mise sous forme canonique : $E(G) = 8\left(p - \frac{3}{8}\right)\left(q - \frac{3}{8}\right) - \frac{1}{8}$ permet de voir que jouer Pair avec la probabilité 3/8 est la meilleure (ou la moins pire) des stratégies pour les deux joueurs. Une simulation de 1000 fois 1000 parties (avec p=0,5 et q=3/8) a donné, pour la répartition des gains de Bernard, le diagramme en boîte suivant :



Gagner à tout prix

On peut imaginer la situation où Bernard désirerait jouer (et gagner) malgré tout. Cette situation n'est pas du tout extravagante puisque de nombreuses personnes jouent régulièrement au loto où l'espérance de gain est nettement plus défavorable.

Plaçons nous dans le cas $p = 1/2$ et $q = 3/8$ et supposons que Bernard puisse arrêter le jeu lorsqu'il le désire. Par exemple Bernard s'arrête dès que son gain est strictement positif ou dès qu'il perd une somme supérieure ou égale à 3€ (dans la suite, nous appellerons jeu une telle suite de parties). Les parties jouées sont modélisées par des variables aléatoires indépendantes X_i dont la loi commune est donnée par :

$$P(X_i=3) = 3/16, \qquad P(X_i=1)= 5/16 \qquad P(X_i=-2) = 1/2.$$

Considérons également les variables aléatoire S_n et T. S_n est le gain total après la n-ième partie (Si $S_n >0$ ou si $S_n \leq -3$ alors $S_k = S_n$ pour tout $k \geq n$). T est la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ qui à tout jeu associe sa longueur c'est-à-dire le nombre de parties jouées.

On remarque qu'alors S_1 à la même loi que X_1 et que $P(T=1) =1/2$.

- S_2 prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-4;-1 ; 1 ; 3\}$:

$P(S_2 = -4) = P_{(X_1=-2)}(X_2 = -2) \times P(X_1 = -2) = \frac{1}{4}$ (par indépendance de X_1 et X_2)

On trouve de même $P(S_2 = -1) = \frac{5}{32}$ $\qquad P(S_2 = 3) = \frac{3}{16}$

et $P(S_2 = 1) = \frac{5}{16} + \frac{3}{32} = \frac{13}{32}$.

En particulier (ce qui commence à intéresser Bernard) $P(S_2 > 0) = \frac{19}{32}$ et $P(T = 2) = \frac{11}{32}$.

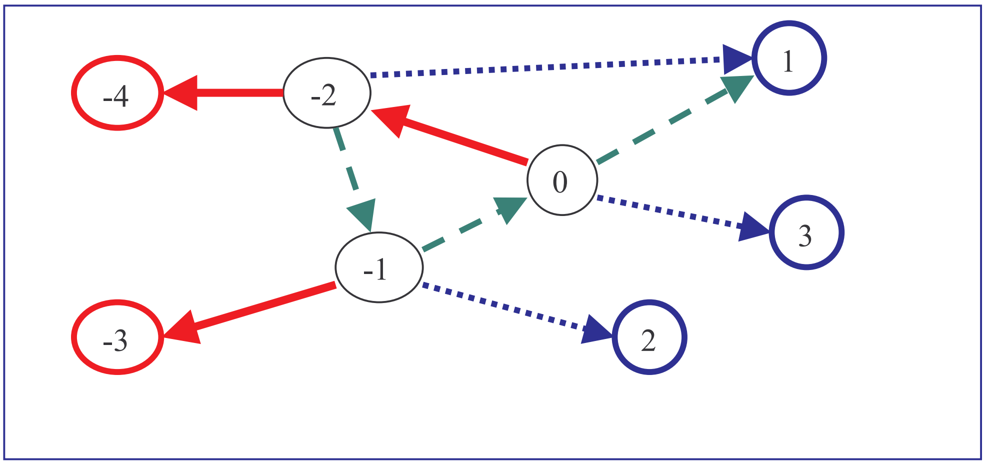
Par contre, on vérifie que $E(S_2) = -\frac{3}{16}$.

- Le jeu ne continue que dans le cas où $S_2 = -1$ et La loi de S_3 est donnée par :

s	-4	-3	0	1	2	3
$P(S_3 = s)$	1/4	5/64	25/512	13/32	15/512	3/16

$P(S_3 > 0) = \frac{319}{512} \approx 0{,}623$, $P(T=3)=\frac{55}{512}$

Plus généralement la situation peut être décrite par le diagramme de transition suivant :



Les flèches pleines sont empruntées avec la probabilité 1/2, celles en pointillés avec probabilité 3/16 et celles tiretées avec probabilité 5/16.
On peut alors constater qu'après 3 parties jouées, soit le jeu est terminé, soit les deux joueurs sont à égalité. Ainsi, on en déduit que :

$P(S_{3n} = 0) = \left(P(S_3 = 0)\right)^n = \left(\frac{25}{512}\right)^n$ et, pour $s \in \{-4;-3;1;2;3\}$

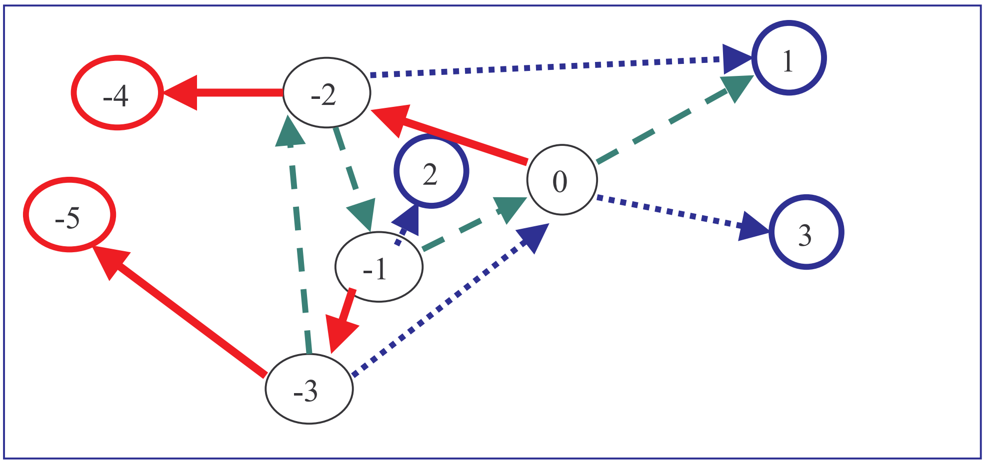
$$P(S_{3n+3} = s) = P(S_{3n} = s) + P\left((S_{3n} = 0) \cap (S_{3n+3} = s)\right) = P(S_{3n} = s) + P(S_3 = s) \times P(S_{3n} = 0)$$

On trouve alors $P(S_{3n} = s)$ comme somme des termes d'une suite géométrique de raison (25/512) et lorsque n tend vers l'infini $P(S_n = s)$ a une limite donnée dans le tableau suivant :

s	-4	-3	0	1	2	3
$P(S_3 = s)$	128/487	40/487	0	208/487	15/487	96/487

On en déduit que la probabilité de gagner est égale à 319/487≈0,655 mais que l'espérance de gain reste négative : -109/487≈-0,22.

Si Bernard décide de s'arrêter de jouer lorsqu'il perd 4€ (à la place de 3) la situation est plus complexe :



On peut dans ce cas considérer les suites :
$a_n = P(S_n = -5)$, $b_n = P(S_n = -4)$, ….$i_n = P(S_n = 3)$, qui vérifient les relations de récurrence:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} c_n & b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} d_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2} e_n & d_{n+1} = \frac{5}{16} c_n + \frac{1}{2} f_n \\ e_{n+1} = \frac{5}{16} d_n & f_{n+1} = \frac{3}{16} c_n + \frac{5}{16} e_n \\ g_{n+1} = \frac{3}{16} d_n + \frac{5}{16} f_n + g_n & \\ h_{n+1} = \frac{3}{16} e_n + h_n & i_{n+1} = \frac{3}{16} f_n + i_n \end{cases}$$

Un logiciel de calcul peut nous permettre d'évaluer les probabilités des différents états pour n assez grand. Pour n= 100, on trouve que $P(T>100) < 10^{-30}$ (ce qui semble garantir que le jeu à peu de chances de se prolonger indéfiniment) et le tableau de valeurs approchées suivantes :

k	-5	-4	2	3
$P(S_{100}=k)$	0,0440	0,2816	0,0330	0,2009

Ainsi Bernard gagnera un peu plus de deux fois sur trois puisque $P(S_{100}>0) \approx 0{,}6744$ cependant son espérance de gain restera évidemment négative: $E(S_{100}) \approx -0{,}247$.

Pour étudier d'autres situations de la même veine, il est préférable d'avoir recours à une simulation (Fichier Excel : Gagner à tout prix):
C est le capital de Bernard et il s'arrête dès qu'il gagne (1, 2 ou 3 €) ou dès qu'il a tout perdu (C ou C+1 €); à chaque fois on a simulé 1000 jeux:

C	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	50	100
Nombre de jeux gagnés	675	700	756	770	779	805	828	854	877	879	894	916

On peut également se placer dans la situation où Bernard dispose d'un capital fixe (100 € par exemple). Son problème est alors de savoir quelle stratégie il doit adopter pour avoir une chance raisonnable de gagner. Il décidera de s'arrêter dès qu'il gagne une somme G ou dès qu'il a perdu ses 100€. Voici les résultats des simulations effectuées (toujours sur 1000 jeux).

G	20	10	9	8	7	6
Nombre de jeux gagnés	265	488	548	583	609	685

Dans ce cas, il semble que pour avoir 2 chances sur 3 de gagner (comme dans la situation précédente), il doive s'arrêter de jouer dès qu'il gagne au moins 6€. D'autres simulations avec G=6 donnent une moyenne de 669 parties gagnées sur 1000. Malheureusement pour lui, on peut dans ce cas estimer son espérance de gain à environ -29€ ce qui n'est évidemment guère brillant.

Pièges à gogos
Revenons à notre problème initial et cherchons à quelles conditions sur les sommes mises en jeu la situation est favorable à Alain.
Le jeu sera alors décrit par le tableau suivant où a,b,c,d sont des réels positifs

	Pair (p)	Impair (1-p)
Pair (q)	a	$-b$
Impair (1-q)	$-c$	d

En notant $S=a+b+c+d$ et en mettant l'espérance de gain de Bernard $E(p,q)$ sous forme canonique, on obtient :

$$E(p;q) = S\left(p - \frac{b+d}{S}\right)\left(q - \frac{c+d}{S}\right) + \frac{ad - bc}{S}$$

Le jeu sera intéressant pour Alain dès que $ad-bc < 0$. En ne considérant que le cas c=b (on ne distingue pas pair - impair de impair - pair ce qui est bien pratique), on trouve :

$$E(p;q) = S\left(p - \frac{b+d}{S}\right)\left(q - \frac{b+d}{S}\right) + \frac{ad - b^2}{S}$$

Ainsi en particulier un jeu en apparence équilibré (tel que $a+d=2b$) sera toujours favorable à Alain (le maximum de xy sont la contrainte $x+y$ = k est obtenu pour $x = y$).

En prenant b =10, terminons notre étude par la recherche des "pièges à gogos" c'est-à-dire des jeux en apparence gagnants pour Bernard ($a+d$>20) et qui lui sont en réalité défavorables (ad<100).

La représentation graphique ci-dessous nous montre les couples qui répondent à la question : Par exemple (16;6) qui procure une espérance de gain de 2/21 à Alain à condition qu'il joue Pile avec probabilité p =8/21.