Interactions entre recherche et enseignement

Patrick Popescu-Pampu

Professeur au Laboratoire Paul Painlevé de l'Université de Lille 1

Journée de l'IREM de Lille, Lundi 20 Mars 2017
Adressée aux formateurs des enseignants de collège

Pourquoi cet exposé ?

Valerio Vassallo m'a proposé de faire un exposé sur la manière dont mes activités d'enseignement et de recherche interagissent. Je le remercie de m'avoir de la sorte incité à réfléchir à cela.

Je ne prétends pas que ce que je raconterai est universel, c'est juste une description sommaire de la manière dont je porte maintenant, à 44 ans, un regard sur mon activité d'enseignant-chercheur.

Ce texte est augmenté par rapport à celui du jour de l'exposé, afin de se prêter plus facilement à une lecture non-accompagnée d'explications orales de ma part.

Motivations possibles pour faire des mathématiques

Tout d'abord, qu'est-ce qui peut pousser quelqu'un à choisir les mathématiques comme activité professionnelle ?

Cela peut être le goût de trouver avant les autres, ce qui s'appelle "**l'esprit de compétition**". Il n'est bien sûr pas spécifique aux mathématiques. Mais il y a aussi, plus spécifiquement :

- Le plaisir de **résoudre** des énigmes/problèmes.
- Le besoin de rechercher la **substantifique moelle** des phénomènes.
- Le besoin de **certitudes** face à un monde déroutant par ses changements incessants.
- Le plaisir de **comprendre**.

C'est ce dernier aspect qui est pour moi le plus important. Mais ce que veut dire *comprendre* est subtil ...

Que signifie comprendre ?

- Ressentir des **liens** intimes entre des choses apparemment différentes. Lorsque l'on essaye de résoudre un problème, on essaye d'établir de tels liens entre les prémisses et la conclusion.
- Ressentir **l'importance** pour la pensée d'un résultat ou d'une théorie ; on pourrait dire qu'il s'agit là de son **sens**.
- Ressentir les **symptômes** de l'utilisation d'un théorème : les indices qui permettent de se rendre compte qu'il est bon de faire appel à lui dans une situation donnée.
- Ressentir l'**évolution** des idées et de leur formulation. Il n'y a pas que les organismes vivants qui évoluent, mais les questionnements, les théories et leur langage aussi.
- Ressentir quelles **intuitions** ou **motivations** ont pu mener à une preuve, une définition, une théorie, etc.

Comment les mathématiciens travaillent-ils à comprendre ?

Ils le font en essayant de :

- **résoudre** des problèmes/conjectures.
- **généraliser** des résultats connus, afin de mieux percevoir leur nature et d'en déduire des outils applicables dans un contexte plus vaste.
- trouver de **nouvelles preuves** de résultats connus :
  - plus compréhensibles ou "naturelles" ;
  - se prettant mieux à la généralisation ;
  - permettant de les rapprocher d'autres résultats.
- trouver de **meilleures formulations**, qui mettent mieux en lumière la nature d'un phénomène.
- trouver des **outils plus adaptés** à l'étude de certains objets.
- présenter des **vues d'ensemble** de certains domaines.
- **explorer** des phénomènes.

C'est ce processus d'exploration qui permet de détecter des régularités ou des analogies, et grâce à elles à formuler de nouvelles questions ou conjectures.

Comment explore-t-on ?

- En **rédigeant** soigneusement des bouts de compréhension, afin de dénicher les éventuelles illusions ou erreurs. Les erreurs sont souvent riches d'enseignements ... pourvu qu'on les détecte et qu'on y médite.
- En **jouant** avec des **exemples** : dessins, calculs. *Jouer* peut signifier considérer de nombreux cas, les regarder sous toutes les coûtures, les comparer.
- En **imaginant**. Ce qui veut dire intérioriser les objets manipulés pendant l'étape de jeu. On peut pousser cela jusqu'à se sentir habité par eux ... on est alors mûr pour sentir une nouvelle idée surgir.
- En détectant des **analogies** et en essayant d'en comprendre les raisons.

Dans tout ce processus, la **culture mathématique** est essentielle. Mais comment l'acquière-t-on ?

Importance de la culture

On développe sa culture mathématique :

- En **étudiant** les travaux d'autres chercheurs.
- En **écoutant** et **discutant** avec d'autres chercheurs.

Mais l'hyperspécialisation contemporaine fait qu'il est très difficile de se comprendre entre domaines un peu éloignés. Peut-être que ce qui nous serait vraiment utile dans notre problème a été démontré dans un langage complètement différent de celui de notre spécialité. Comment le savoir ?

Cela n'est possible que lorsque suffisamment de chercheurs sont conscients de l'importance d'expliquer les idées essentielles et les avancées de leur domaine d'une manière peut-être imprécise, mais accessible à beaucoup plus de personnes que leurs collègues de spécialité. Sinon, il ne peut pas y avoir une bonne **transmission** des idées, de leur **sens**.

Importance de la transmission

- Le temps manque pour devenir spécialiste de chaque domaine. Il est nécessaire de pouvoir **s'y orienter assez rapidement**.
- La **rigueur logique et de langage** (essentielles comme mécanisme de traque des erreurs et d'écriture avec des règles communes) n'assurent pas à elles seules la transmission du sens.
- L'**intonation**, les **gestes**, un petit **dessin** fait au bon moment peuvent tout éclairer brusquement. Ainsi naissent parfois des projets de collaboration !
- Les textes introductifs les plus utiles contiennent :
  - des renseignements sur les **motivations** d'une théorie ;
  - de nombreux **exemples** ;
  - des **intuitions** ;
  - des aperçus du **développement historique** de la théorie.
- En essayant d'expliquer aux autres, on comprend soi-même beaucoup mieux. D'ailleurs, **comment voir autrement si l'on a vraiment compris** ?

Comment j'essaye de transmettre du sens mathématique

- En écrivant des articles de survol.
- En écrivant *des billets et des articles* sur le site :

  Images des Mathématiques

- En ayant participé aux œuvres pédagogiques et de restitution historique du groupe évolutif de mathématiciens *Henri Paul de Saint-Gervais* (ce pseudonyme rappelle notre réunion initiale à *Saint-Gervais*-la-Forêt autour du théorème d'uniformisation de *Henri* Poincaré et *Paul* Koebe) :
  - Le livre "**Uniformisation des surfaces de Riemann**" ;
  - Le site internet :

    Analysis Situs

- En ayant publié le livre "**What is the genus?**", promenade historique illustrant les métamorphoses de la notion mathématique fondamentale de *genre*.
- Par des exposés de toutes sortes.

Les ateliers d'"Exploration Mathématique"

Comment les aspects de la vie de recherche dont je viens de parler me guident-ils dans mon enseignement ?

Par exemple, depuis quelques années je dirige une sorte d'atelier mathématique en seconde année de Licence, intitulé "*Explorations Mathématiques*". Les étudiants y travaillent par petits groupes (entre 2 et 4 personnes) sur des textes choisis parmi une liste que je leur propose au début. Ils doivent rendre un mémoire écrit en commun et faire de courts exposés oraux individuels (de 10 à 15 minutes) :

- en présentant **l'architecture globale du mémoire** ;
- ou en présentant **les idées essentielles d'une preuve**.

Qu'apprend-on dans ces ateliers ?

- À **collaborer** en mathématiques.
- À **étudier un texte mathématique en profondeur**.
- Que si l'on travaille un peu tous les jours au même problème, alors on progresse forcément.
- Que les résultats assez complexes ne peuvent pas être compris autrement.
- Que l'on est tous d'éternels étudiants : on doit toujours apprendre de nouvelles choses face aux nouveaux problème, afin d'espérer les résoudre.
- À rédiger un texte mathématique :
  - **rigoureux** dans les détails et dans sa structure globale ;
  - illustrant les définitions et les énoncés par des **exemples** et des **dessins** bien choisis ;
  - amenant le lecteur à comprendre clairement une **question** avant de lui donner la **réponse**.
- À expliquer des mathématiques oralement. Il faut **donner envie de lire le texte écrit**.

Quel est mon rôle dans ces ateliers ?

Je **sélectionne soigneusement** les textes à étudier dans des livres ou des revues, comme par exemple :

- "*Proofs from the Book*" de Aigner et Ziegler ;
- "*The mathematical omnibus*" de Fuchs et Tabachnikov ;
- *The American Mathematical Monthly*.

Mais je ne les étudie pas à l'avance, pour que ce soient eux qui me les expliquent.

Lorsqu'ils me font part de leurs difficultés, j'essaye de les **aider**. Ils me voient ainsi toujours essayer de comprendre en **expérimentant par des calculs ou des dessins**, et petit à petit ils acquièrent aussi cet automatisme.

Ils présentent des bouts de compréhension (un énoncé, une preuve) au tableau. **Je demande ensuite aux autres de commenter ces présentations, en explicitant ce qu'ils ont aimé et ce qu'il faudrait changer**. Puis je rajoute mes propres remarques.

Conclusion

Les fruits de la recherche scientifique ne sont des outils de liberté que lorsqu'ils sont intimement compris. Sinon, ils ne sont plus que des outils de pouvoir, permettant d'imposer des choix par des arguments d'autorité.

Il me semble pour cela très important d'habituer au plus tôt les enfants à chercher à comprendre les phénomènes, puis à transmettre leur compréhension. Les mathématiques sont un merveilleux espace d'apprentissage de cette habitude, car jouer pour explorer y est tellement facile !

Un livre que j'aime bien et duquel je crois qu'on peut extraire facilement des sujets d'étude en groupe adaptés aux collégiens est :

Hugo Steinhaus, **Mathématiques en instantanés**.

FIN

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !