Formule des cinq niveaux

Énoncé

L'objectif est d'approcher le calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ par une combinaison linéaire de valeurs de cette fonction en des points particuliers de $[a\,;b]$. On note p_i la fonction polynôme définie sur $[0\,;1]$ par $p_i(x) = x^i$ pour $i = 0, \dots 4$. Par convention $p_0(x) = 1$ sur $[0\,;1]$.

1). Exprimer que les coefficients réels a, b, c, d, e sont tels que, pour $i = 0, \dots 4$:

$$\int_0^1 p_i(x)dx = a.p_i(0) + b.p_i\left(\frac{1}{4}\right) + c.p_i\left(\frac{1}{2}\right) + d.p_i\left(\frac{3}{4}\right) + e.p_i(1)$$

On obtiendra un système de cinq équations à cinq inconnues que l'on résoudra à la calculatrice. Créer une liste avec les cinq solutions trouvées a, b, c, d, e dans l'ordre.

Appeler l'examinateur pour vérification

On admet que lorsque f est une fonction continue sur $[0\,;1]$,

$$\frac{1}{90}\left(7f(0) + 32f\left(\frac{1}{4}\right) + 12f\left(\frac{1}{2}\right) + 32f\left(\frac{3}{4}\right) + 7f(1)\right)$$

est une bonne approximation de $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. On appellera cette expression la *formule des cinq niveaux.*

2). On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$. Créer une deuxième liste contenant dans l'ordre :$\{f(0), f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{3}{4}\right), f(1)\}$ et évaluer, grâce à la formule donnée $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x+3}dx$.

Calculer la valeur exacte de cette intégrale. (On remarquera que, pour tout $x \in [0;1]$ $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x+3}$). Quel est l'écart avec la valeur trouvée en utilisant la formule précédente ?

Appeler l'examinateur pour vérification

3). Proposer une amélioration de la méthode ; à défaut, établir la *formule des neuf niveaux* :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx$$

$$\frac{1}{28350}(989f(0) + 5888f(\frac{1}{8}) - 928f(\frac{1}{4}) + 10496f(\frac{3}{8})$$
$$-4540f(\frac{1}{2}) + 10496f(\frac{5}{8}) - 928f(\frac{3}{4}) + 5888f(\frac{7}{8}) + 989f(1)).$$