Le cercle de Monge

Fiche élève

TS

Auteur : Pierre Lapôtre

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe $\mathscr{F}$ représentative de la fonction f définie sur $[-4{,}4]$ par $f(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.
Soit M_0 et M_1 deux points de $\mathscr{F}$ d'abscisses respectives x_0 et x_1 vérifiant :

$$-4 < x_0 < 0 \text{ et } 0 < x_1 < 4$$

On note T_0 la tangente à $\mathscr{F}$ en M_0, T_1 la tangente à $\mathscr{F}$ en M_1 . T_0 et T_1 sont sécantes en P.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire une figure correspondant à cette description.
   Déplacer le point M_0 ou le point M_1 de sorte que T_0 et T_1 soient perpendiculaires. Envisager plusieurs positions de M_0 et de M_1 permettant de réaliser cette condition. (on pourra afficher la mesure de l'angle $\widehat{M_0PM_1}$ et éventuellement modifier les paramètres de déplacement du point M_0)
   Émettre une conjecture sur le lieu de P lorsque x_0 décrit $]-4{,}0[$, T_0 et T_1 étant perpendiculaires.

Appeler l'examinateur pour vérification de la figure construite et validation de la conjecture émise.

   Pour la suite, on pourra utiliser un logiciel de calcul formel.
2. Donner le coefficient directeur m de T_0 en fonction de x_0.
   Comparer les signes de x_0 et de m.
3. On fixe m.
   Trouver alors l'abscisse x_0 du point de contact de la tangente à $\mathscr{F}$ en fonction du coefficient directeur m.
   En déduire que cette tangente a pour équation : $y = mx + \sqrt{16m^2+9}$.

Appeler l'examinateur pour vérification.

4. On considère un point P de coordonnées $(x_2{,}y_2)$ vérifiant :

   $$\text{(i)} \qquad (|x_2| < 4 \text{ et } f(x_2) < y_2)$$

   a. Montrer que si une droite de coefficient directeur m passant par P est tangente à $\mathscr{F}$ alors m est solution de

   $$\text{(E)} \qquad m^2(x_2^2-16) - 2mx_2y_2 - 9 + y_2^2 = 0.$$

   b. Montrer que cette équation possède deux solutions lorsque la conditions (i) est réalisée. Lorsque (i) est réalisée, on peut donc mener de P deux tangentes à $\mathscr{F}$.

   c. Sur quelle ligne se situe le point P lorsque le produit des solutions de l' équation (E) est égal à -1 ? Interpréter.

Production écrite : rédaction complète des questions 2, 3 et 4.
Commentaire : si on trace le symétrique $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ par rapport à l'axe des abscisses, on obtient une courbe fermée, réunion de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{G}$ appelée *ellipse*. On démontre que l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à l'ellipse est un cercle, appelé cercle de Monge de l'ellipse, dont nous venons de trouver un arc.