

ALGORITHMES & MATHÉMATIQUES MÉDIÉVALES

Sélection de textes proposés par
Marc Moyon, Université de Limoges

Journées académiques « Algorithmique et numérique au collège »
IREM de Lille, 10/02/2017

Problème 1 : « Problème du carré »

Extrait du *Liber Mensurationum*¹ (Livre sur le mesurage) - auteur inconnu [Moyon, 2008, Moyon, 2017].

Et si on te dit :
j'ai retranché l'aire de ce <quadrilatère> de ses côtés et il est resté trois.
Quel est alors chacun de ses côtés ?

Le procédé pour cela sera de partager le nombre des côtés en deux moitiés, ce sera deux, multiplie-le alors par lui-même et le résultat sera quatre.

Retranches-en aussi trois et il restera un.

Prends sa racine <carrée> qui est un.

Si tu lui ajoutes deux, le côté sera trois.

Et si tu le retranches de deux, il restera un.

Ce qui sera chacun des côtés du <quadrilatère>. Ceci a lieu par l'augmentation et la diminution.

La résolution de ce <problème> par l'algèbre sera de toujours poser le côté comme la chose.

Multiplie-la par elle-même et ce qui résultera sera le bien.

Retranche-le aussi des côtés du carré qui sont quatre choses.

Il restera quatre choses moins le bien qui sont égales à trois.

Restaure donc et compare et tu auras, après comparaison, le bien et trois drachmes qui sont égaux à quatre choses.

Procède donc selon ce qui a précédé dans le cinquième problème d'algèbre.

Problème 2 : « Deux problèmes consécutifs autour du triangle obtusangle »

Extrait du *Liber Mensurationum* (Livre sur le mesurage) - auteur inconnu [Moyon, 2008, Moyon, 2017].

Et si on te dit :
l'aire est vingt-quatre, la hauteur est trois et un cinquième.
Quelle est la base ?

1. *Liber in quo terrarum et corporum que continentur mensuraciones ab abuchri qui dicebatur heus, translatus a magistro girardo cremonensi in Toletum de arabico in latinum abbreviatus incipit.* (Débute <ici> le livre abrégé dans lequel sont contenues les mesures de surfaces et de volumes d'Abū Bakr qui était dit Heus, traduit par le maître Gérard de Crémone à Tolède de l'arabe au latin)

Le procédé pour déterminer cela consistera à diviser l'aire par trois et un cinquième, à doubler le résultat.

Ce sera la base.

Et si tu veux, double l'aire et ce sera quarante-huit. Ensuite, divise aussi par trois et un cinquième et ce sera la base.

Et si on te dit :
l'aire est vingt-quatre et la base est quinze.
Quelle est la hauteur ?

Le procédé pour déterminer cela consistera à diviser l'aire par la moitié de la base, et tu auras la hauteur.

Problème 3 : « Problème d'âge »

Extrait du *Liber abaci* (Livre de calcul) de Fibonacci [Boncompagni, 1857, Moyon, 2016].

Une personne vécut un certain temps.
Si elle avait vécu en plus autant qu'elle vécut, et encore autant, puis $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ de ce qu'elle a vécu, et encore un an en plus, elle aurait vécu 100 ans.
On cherche combien de temps elle vécut.

Il faut faire ainsi.

Extrais de 100 le 1 qui s'ajoute aux années, il reste 99.

Ensuite pose que la personne a vécu 12 ans. Si elle avait vécu autant de temps, puis encore autant, puis de nouveau autant, puis $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ d'autant, elle aurait vécu 43 ans.

Dis alors : pour les 12 ans que je pose comme l'âge qu'elle aurait atteint, on arrive à une somme de 43 ans.

Que dois-je alors poser pour atteindre un total de 99 ans ?

Multiplie 12 par 99, ce sera 1188.

Divise alors cela par 43, il en vient $\frac{27}{43}$ 27 années. C'est ce que cette personne vécut.

Ce serait la même chose de diviser 99 par $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$.

Problème 4 : « Problème du bien »

Extrait du *Liber augmenti et diminutionis*² (Livre de l'augmentation et de la diminution) - auteur inconnu [Libri, 1838, Hughes, 2001].

Voici donc le sujet :
Nous avons un bien dont on soustrait le tiers et le quart, il reste huit.
Quel est le bien ?

La procédure de son calcul est de prendre un plateau <qui est> de douze (le tiers et le quart en sortent) et de soustraire ce tiers et ce quart qui sont sept, et il restera cinq.

Compare alors celui-ci à huit, autrement dit le reste du bien et il t'apparaîtra alors que tu as fait une erreur de trois en moins ; conserve ceci.

Puis prends un second plateau, différent du premier, qui sera de vingt-quatre.

Soustrais-lui son tiers et son quart, qui sont quatorze, et il restera dix.

Compare-le alors avec huit, à savoir le reste du bien. Il apparaît alors que tu as fait une erreur de deux en plus.

2. *Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ex eo quod sapientes Indi posuerunt quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit.* (Livre de l'augmentation et de la diminution appelée calcul par prédiction, à partir de ce que les sages de l'Inde ont mis en place, qu'Abraham a compilé et composé selon un Livre que l'on appelle <Livre> des Indiens)

Multiplie donc l'erreur du dernier plateau qui est deux par le premier plateau, qui est douze, et il en résultera 24.

Et multiplie l'erreur du premier plateau, qui est trois, par le dernier plateau, qui est 24, et ce sera 72.

Ajoute alors 24 et 72, ceci parce qu'une erreur est en moins et l'autre en plus.

Si, en effet, les <erreurs> étaient toutes les deux soit en moins soit en plus, <alors> tu soustrairais le plus petit <produit> du plus grand.

Donc, après avoir ajouté vingt-quatre et soixante-douze, ce qui aura été ajouté est quatre-vingt-seize.

Puis ajoute les deux erreurs qui sont trois et deux, il en résultera cinq.

Puis donc <divise> quatre-vingt-seize par cinq qui est ce qui en a résulté, et il te parviendra dix-neuf drachmes et un cinquième de drachmes.

Cette règle-ci est aussi de poser douze pour la chose inconnue, et soustrais son tiers et son quart, et il restera cinq.

Dis alors par quoi multiplier cinq pour obtenir douze ?

Ceci est en effet la chose inconnue.

Cela est alors deux et deux cinquièmes : multiplie donc deux et deux cinquièmes par huit et ce sera dix-neuf et un cinquième.

Problème 5 : « Problème des fruits et du voyageur »

Extrait du *Liber abaci* (Livre de calcul) de Fibonacci [Boncompagni, 1857, Moyon, 2016].

Quelqu'un a cueilli des fruits dans un verger auquel on accède par 7 portes successives.

Lorsqu'il a voulu en sortir, il lui a fallu donner au premier gardien la moitié de tous les fruits et un en plus.

Au second gardien, la moitié des fruits restants et un en plus.

Il a dû en donner aux cinq autres gardiens de la même manière.

Il ne lui resta plus alors qu'un seul fruit.

On demande combien de fruits du verger cette personne a cueilli.

Tu fais ainsi :

pour un fruit, c'est ce qu'il lui reste, cette personne en possède 1. On ajoute à celui-ci un fruit, ce qu'elle a remis au dernier gardien : ils seront 2 fruits, qu'on double, ils seront 4. Et c'est autant qu'elle avait lorsqu'elle est tombée sur le dernier gardien.

On ajoute à ceux-ci le fruit qu'elle a donné au sixième gardien : ils seront 5 fruits, qu'on double, ils seront 10.

Et c'est autant que ce qu'il lui restait après la sortie de la cinquième porte.

On ajoute à ceux-ci le fruit qu'elle a donné au cinquième gardien : ils seront 11 fruits, qu'on double, ils seront 22.

On ajoute à ceux-ci 1 pour le fruit qu'elle donne au quatrième gardien : ils seront 23, qu'on double, ils seront 46.

On ajoute à ceux-ci 1 pour le fruit qu'elle donne au troisième gardien : ils seront 47, qu'on double, ils seront 94.

On ajoute à ceux-ci 1 pour le fruit qu'elle donne au deuxième gardien : ils seront 95, qu'on double, ils seront 190.

On leur ajoute 1 pour le fruit qu'elle donne à la première porte et on double la quantité obtenue, ils seront 382 fruits et c'est autant de fruits que ce que la personne avait.

Et ainsi inversement, selon ce qui a été proposé, en revenant en arrière, tu pourras résoudre n'importe quelle situation semblable. (...)

Autrement, pose ce que la personne a cueilli au départ comme la chose.

Elle en enlève la moitié à la première porte et 1 fruit. Il reste alors $\frac{1}{2}$ chose moins 1.

À la seconde porte, il en enlève la moitié et un fruit : il reste alors un quart de chose moins $(1+\frac{1}{2})$ de fruits.

À la troisième porte, il en enlève la moitié et un fruit. C'est pourquoi il reste $\frac{1}{8}$ de choses moins $(1+\frac{3}{4})$ de fruits dont il donne à la quatrième porte la moitié et un fruit.

Et ainsi, il en reste $\frac{1}{16}$ de choses moins $(1+\frac{7}{8})$ de fruits dont il reste $\frac{1}{32}$ de choses moins $(1+\frac{15}{16})$ lorsqu'à la cinquième porte, il donne la moitié et un fruit ajouté.

Il en donne sa moitié et un fruit ajouté à la sixième porte, il reste $\frac{1}{64}$ de choses moins $(1+\frac{31}{32})$ de fruits.

De cela alors, lorsqu'il en donne la moitié et un fruit ajouté à la septième porte, il reste $\frac{1}{128}$ de choses moins $(1+\frac{63}{64})$ de fruits qui sont égaux à un fruit.

C'est évidemment ce qu'il reste après être sorti des sept portes.

Si un fruit est ajouté à $(1+\frac{63}{64})$, il en vient que : $\frac{1}{128}$ de choses sont égales à $(2+\frac{63}{64})$ de fruits.

C'est pourquoi on multiplie $(2+\frac{63}{64})$ par 128, il y aura semblablement 382 fruits.

Problème 6 : « Commerce à Lucques, Florence et Pise »

Extrait du *Liber abaci* (Livre de calcul) de Fibonacci [Boncompagni, 1857, Moyon, 2016].

Un homme partit commercer à Lucques, il y fit le double et y dépensa 12 deniers.

Puis il quitta cette ville pour se rendre à Florence. Il y fit le double et y dépensa 12 deniers.

Lorsqu'il revint à Pise, il y fit le double et y dépensa 12 deniers.

Et il est proposé que rien ne lui resta.

On demande combien il possédait au départ de son voyage.

Problème 7 : « Le jour inconnu »

Extrait des *Subtilitates enigmatum* (Subtilités des devinettes) - anonyme [Sesiano, 2014].

Si tu veux savoir en quel jour quelqu'un a embrassé son amie, dis-lui de doubler le jour, d'ajouter 1, de multiplier le tout par 5, puis le résultat par 10, et de soustraire 50 de toute la somme.

Demande ensuite combien de fois on peut certainement soustraire 100 de toute la somme.

Si c'est une fois, ce sera dimanche, si deux, lundi, si trois, mardi et ainsi de suite.

Problème 8 : « Problème des lapins »

extrait du *Liber abaci* (Livre de calcul) de Fibonacci [Boncompagni, 1857, Moyon, 2016].

Quelqu'un plaça une paire de lapins dans un endroit clos de tous côtés afin de savoir combien de descendants cette seule paire engendrerait en une année.

Or, il est dans leur nature de mettre au monde une nouvelle paire chaque mois, et les lapins ont des descendants deux mois après leur naissance.

Comme la paire susmentionnée a des descendants le premier mois, tu la doubleras, et il y aura deux paires le premier mois. De celles-ci l'une, la première, aura des descendants le deuxième mois, de sorte qu'il y aura 3 paires le deuxième mois.

De celles-ci, deux seront rendues fécondes ce même mois, de sorte que 2 paires de lapins sont mises au monde le troisième mois et qu'il y aura ainsi 5 paires ce mois-là.

De celles-ci, 3 seront rendues fécondes, et il y aura 8 paires le quatrième mois.

De ces dernières, 5 engendreront cinq paires, qui, ajoutées aux 8 paires, donneront 13 paires pour le cinquième mois.

De ces paires, 5, mises au monde durant le même mois, ne concevront pas au cours dudit mois, mais les 8 autres paires procréeront.

Par suite, il y aura 21 paires le sixième mois. Y ajoutant les 13 paires se reproduisant au septième mois, il y aura durant celui-ci 34 paires.

Y ajoutant les 21 paires se reproduisant au huitième mois, il y aura durant celui-ci 55 paires.

Y ajoutant les 34 paires se reproduisant au neuvième mois, il y aura durant celui-ci 89 paires.

Y ajoutant de même les 55 paires se reproduisant au dixième mois, il y aura durant celui-ci 144 paires.

Y ajoutant de même les 89 paires se reproduisant au onzième mois, il y aura durant celui-ci 233 paires.

Y ajoutant encore les 144 paires se reproduisant au dernier mois, il y aura 377 paires. C'est le nombre de paires qu'engendra la paire susmentionnée placée dans ledit endroit au terme d'une année.

Tu peux voir dans cette marge notre manière d'opérer.

Nous avons ajouté le premier nombre au second, soit 1 à 2, le second au troisième, le troisième au quatrième, le quatrième au cinquième, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous additionnions le dixième au onzième, à savoir 144 à 233, et nous avons obtenu la somme desdits lapins, soit 377 (paires).

Tu pourrais poursuivre ainsi pour un nombre illimité de mois

<i>Paire</i>
1
<i>Premier</i>
2
<i>Second</i>
3
<i>Troisième</i>
5
<i>Quatrième</i>
8
<i>Cinquième</i>
13
<i>Sixième</i>
21
<i>Septième</i>
34
<i>Huitième</i>
55
<i>Neuvième</i>
89
<i>Dixième</i>
144
<i>Onzième</i>
233
<i>Douzième</i>
377

Reproduction
du tableau en
marge

Références

- [Boncompagni, 1857] Boncompagni, B. (1857). *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Rome.
- [Djebbar, 2014] Djebbar, A. (2014). *Les mathématiques arabes (IX^e-XVI^e)*. Textes et documents. Éditions DGRSDT/CRASC, Réghaïa (Algérie).
- [Hughes, 2001] Hughes, B. (2001). A treatise on problem solving from early medieval latin europe. *Mediaeval Studies*, 63 :107–141.

- [Knuth and Cégielski, 2011] Knuth, D. E. and Cégielski, P. (2011). *Éléments pour une histoire de l'informatique*. CSLI Publications - Société Mathématiques de France, Stanford - Paris.
- [Libri, 1838] Libri, G. (1838). *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du XVII^e siècle*. 4 vol. J. Renouard, Paris.
- [Moyon, 2008] Moyon, M. (2008). *La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple du mesurage et du découpage : contribution à l'étude des mathématiques médiévales*. PhD thesis, Université de Lille 1.
- [Moyon, 2014] Moyon, M. (2014). Apprendre les mathématiques au moyen âge : l'importance des traductions arabo-latines. *Images des Mathématiques. La recherche mathématiques en mots et en images*.
- [Moyon, 2016] Moyon, M. (2016). *Fibonacci : extraits du livre de calcul (Liber abaci)*. ACL Kangourou, Paris.
- [Moyon, 2017] Moyon, M. (2017). *La géométrie de la mesure dans les traductions arabo-latines médiévales*. Brepols, Turnhout.
- [Sesiano, 2014] Sesiano, J. (2014). *Récréations mathématiques au Moyen Âge*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- [Traub, 1964] Traub, J. F. (1964). *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (New Jersey).