Méthode de Héron

TS- Lycée Malraux Béthune- Année 2019-2020

JA Irem de Lille

Comment inclure du code PYTHON dans un source LaTeX ?

---

1 Exercice Type bac

Énoncé

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$.
On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer la limite de la fonction f en 0.
   Donner une interprétation graphique du résultat.
2. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C_f avec la droite Δ d'équation $y=x$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{3}{u_n}\right)$.

1. Placer sur l'axe des abscisses du graphique donné en Annexe les cinq premiers termes de la suite (u_n). Laisser les traits de construction apparents.
2. Émettre une conjecture quant au sens de variation de la suite (u_n) et à son éventuelle convergence.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $P(n)$: $\sqrt{3}\leq u_{n+1}\leq u_n$.
4. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.
5. On donne l'algorithme suivant :

$u \longleftarrow 6$
$n \longleftarrow 0$
$\epsilon \longleftarrow 0,1$
Tant Que $u\leq\sqrt{3}-\epsilon$ ou $u\geq\sqrt{3}+\epsilon$ **Faire**
    $u \longleftarrow \dfrac{1}{2}\left(u+\dfrac{3}{u}\right)$
    $n \longleftarrow n+1$
Fin du Tant Que
Afficher u et n

   a. Quel est le rôle de cet algorithme ? Justifier que, si on l'exécute, il affichera une valeur de u et de n.
   b. Quelles valeurs de n et de u affiche-t-il en sortie si on l'exécute ?
   c. Que doit-on modifier dans l'algorithme pour qu'il affiche en sortie une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-5} près ?

---

2 Exercice Type bac

Éléments de correction

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer la limite de la fonction f en 0.
   Donner une interprétation graphique du résultat.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

   La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C_f.

2. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
   Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{x^2 - 3}{x^2}\right)$$

   Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $x^2 - 3$.
   Or, sur $]0;+\infty[$, $x^2 - 3 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{3}$.
   Conclusion : $f'(x) > 0$ sur $]\sqrt{3};+\infty[$. $f'(x) = 0$ si $x = \sqrt{3}$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]0;\sqrt{3}[$.
   Donc f est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{3}[$ et strictement croissante sur $]\sqrt{3};+\infty[$.
   D'où le tableau :

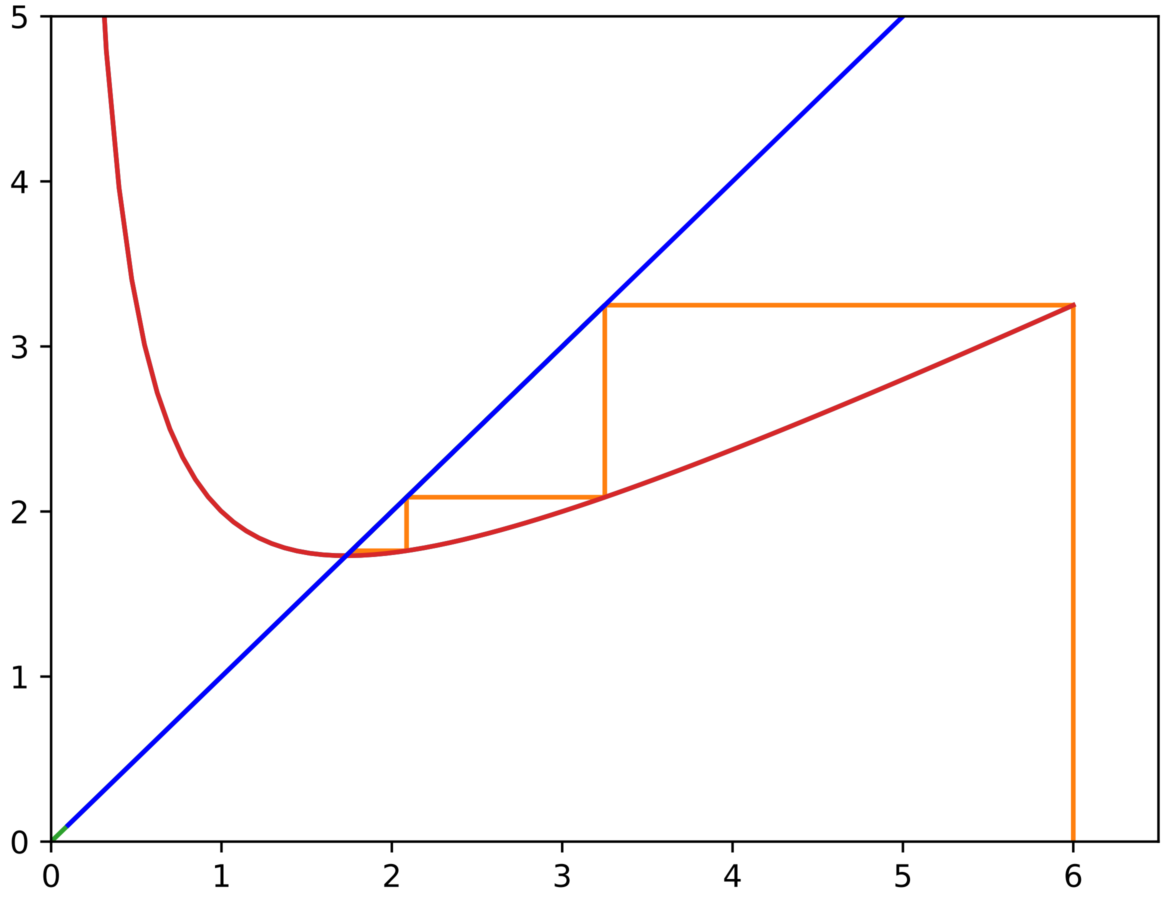
x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C_f avec la droite Δ d'équation $y = x$.
   $x > 0$. $M(x;y)$ appartient aux deux courbes ssi $y = x$ et $y = f(x)$.
   Il suffit donc de résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation (E) : $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right) = x$.
   Or, $(E) \iff x + \dfrac{3}{x} = 2x \iff 2x - x = x = \dfrac{3}{x} \iff x^2 = 3$
   x devant être > 0, la seule solution est $x = \sqrt{3}$.
   Les deux courbes se coupent au point **M** de coordonnées $(\sqrt{3};\sqrt{3})$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right)$.

1. Placer sur l'axe des abscisses du graphique donné en Annexe les cinq premiers termes de la suite (u_n). Laisser les traits de construction apparents.



On peut aussi afficher des valeurs approchées des dix premiers termes de la suite (u_n) :

u(0)= 6
u(1)= 3.25
u(2)= 2.0865384615384617
u(3)= 1.7621632399858207
u(4)= 1.7323080932066346
u(5)= 1.7320508266751493
u(6)= 1.7320508075688774
u(7)= 1.7320508075688772
u(8)= 1.7320508075688772
u(9)= 1.7320508075688772

Remarque : la notation u(i) rappelle que la suite (u_n) est d'abord une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Émettre une conjecture quant au sens de variation de la suite (u_n) et à son éventuelle convergence.
La suite (u_n) semble décroissante et converger vers l'abscisse du point d'intersection **M** des deux courbes, abscisse qui vaut $\sqrt{3}$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $P(n)$: $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
Étape 1 : initialisation
$u_0 = 6$ et $u_1 = \dfrac{1}{2}\left(6 + \dfrac{3}{6}\right) = \dfrac{39}{12} \simeq 3.25$.
Il est clair que $\sqrt{3} \leq u_1 \leq u_0$.
Étape 2 : hérédité
Supposons que, pour un n entier naturel donné, $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
Or, on a démontré plus haut que la fonction f était strictement croissante sur l'intervalle $[\sqrt{3}; +\infty[$, donc

$$f(\sqrt{3}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

donc

$$\sqrt{3} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Conclusion : $P(0)$ est vraie, et $P(n)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vraie.
Par le *principe de récurrence*, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.
On vient de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$.
Le *théorème de convergence monotone* nous dit alors que la suite (u_n) est convergente.

5. Déterminer la valeur exacte de ℓ.
Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, alors, la fonction f étant continue sur $]0;+\infty[$, ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.
D'après ce qui précède, $\ell = \sqrt{3}$.
On notera bien que l'équation (E) admet aussi la solution $-\sqrt{3}$ qui n'a pas été choisie car on travaille sur $]0;+\infty[$.

6. On donne l'algorithme suivant :

$u \longleftarrow 6$
$n \longleftarrow 0$
$\epsilon \longleftarrow 0,1$
Tant Que $u \leq \sqrt{3}-\epsilon$ ou $u \geq \sqrt{3}+\epsilon$ **Faire**
  $u \longleftarrow \dfrac{1}{2}\left(u+\dfrac{3}{u}\right)$
  $n \longleftarrow n+1$
Fin du Tant Que
Afficher u et n

a. Quel est le rôle de cet algorithme ? Justifier que, si on l'exécute, il affichera une valeur de u et de n.
L'algorithme permet de déterminer la première valeur de l'entier n pour laquelle u_n appartient à l'intervalle $]\sqrt{3}-\epsilon;\sqrt{3}+\epsilon[$, le réel ϵ ayant été initialisé à $0,1$.
On pourra remarquer que, pour tout $\epsilon > 0$, la condition $u \leq \sqrt{3}-\epsilon$ ou $u \geq \sqrt{3}+\epsilon$ peut être remplacée par la condition $u \geq \sqrt{3}+\epsilon$.
En effet, on a montré que, pour tout entier n, $u_n \geq \sqrt{3} > \sqrt{3}-\epsilon$.

b. Quelles valeurs de n et de u affiche-t-il en sortie si on l'exécute ?
En langage PYTHON, on exécute ce script :

```python
import math
u=6
n=0
while u>=sqrt(a)+0.1:
    u=0.5*(u+(a/u))
    n=n+1
print("u=",u," et n=",n)
```

Cela donne :
u= 1.7621632399858207 et n= 3

c. Que doit-on modifier dans l'algorithme pour qu'il affiche en sortie une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-5} près ?
Il suffit d'initialiser ϵ à 10^{-5}.
Ce qui donne
u= 1.73205 et n= 5

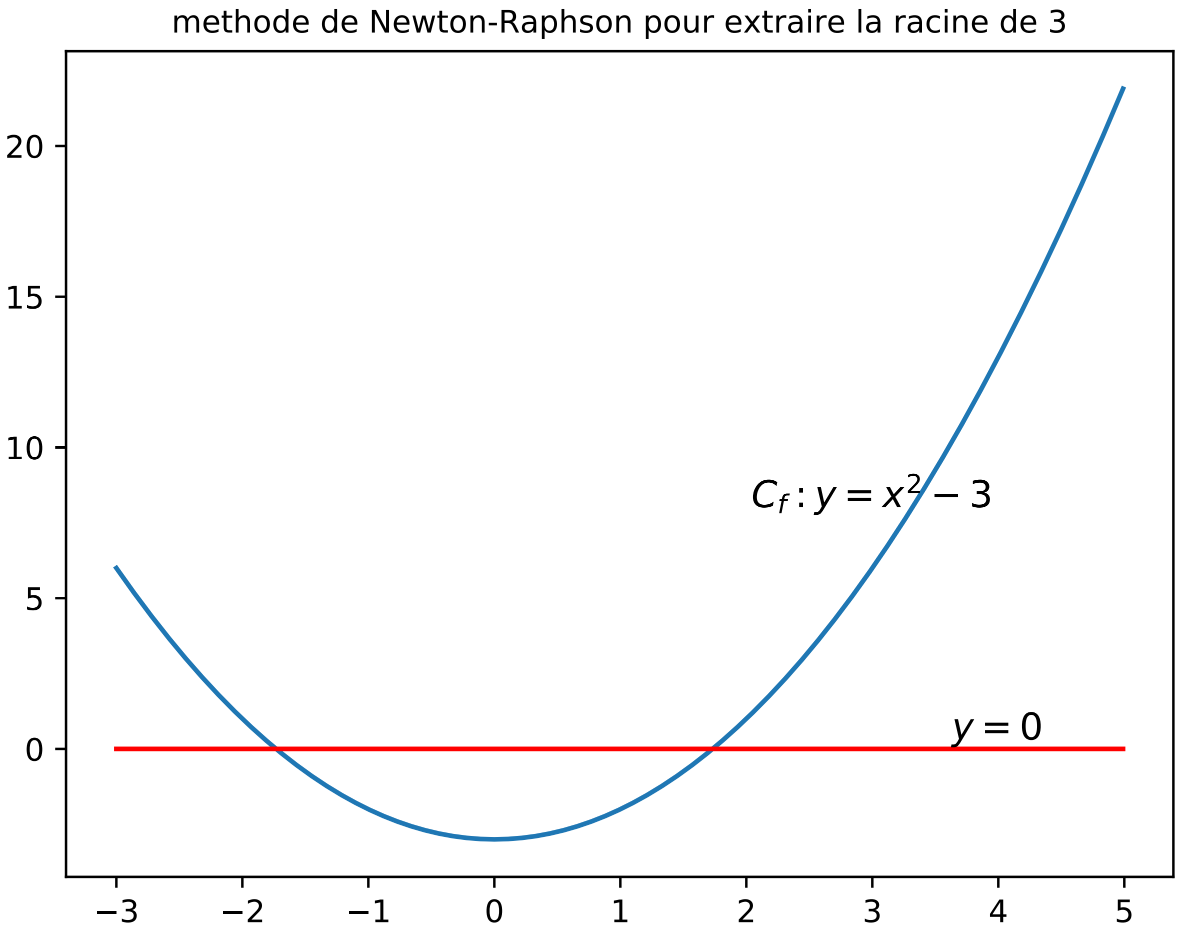
3 Méthode de Newton-Rapson

3.1 Description de la méthode

On trouvera une description assez exhaustive de la méthode ICI

3.2 Lien entre la suite (u_n) de l'exercice et la méthode de Newton-Raphson

La lecture de la page *Wikipedia* permet de faire le lien entre la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$, d'une part, et la recherche du zéro de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}^+$.



La méthode de Newton-Raphson permet l'approximation, à 10^{-6} près :

$$\sqrt{3} \approx 1.732051$$

Cette valeur approchée de $\sqrt{3}$ est obtenue en 5 itérations.

3.3 Comparaison de vitesses de convergence

Les méthodes dites respectivement de « balayage » et de « dichotomie » sont connues par les élèves depuis quelques temps.

Nous allons, sur un exemple, comparer les trois méthodes au travers des vitesses de convergence de chacune.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x - 20$.

On prouve facilement que le tableau des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x) = 3x^2 - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(-\sqrt{2}) \approx -14.3$	↘	$g(\sqrt{2}) \approx -25.7$	↗	$+\infty$

Le tableau nous indique que, pour tout $x \in]-\infty; \sqrt{2}]$, $g(x) < 0$.

d'autre part, la fonction g est continue et strictement croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$, avec $g(\sqrt{2}) < 0$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet de justifier l'existence et l'unicité d'une solution, notée α, à l'équation $g(x) = 0$.

On peut localiser α dans un intervalle d'amplitude 1 en observant le tableau suivant :

x	$g(x)$
1	-25
2	-24
3	-11
4	20

α se trouve donc dans l'intervalle $[3; 4]$.

Comparons maintenant les trois méthodes de recherche d'une valeur approchée de α à respectivement 10^{-3}, 10^{-5} et 10^{-10} près.

Comparaison pour une précision au millième :

- Balayage :

$$\alpha \approx 3.438 \text{ et nb d'itérations=439}$$

- Dichotomie :

$$\alpha \approx 3.438 \text{ et nb d'itérations=11}$$

- Newton-Raphson :

$$\alpha \approx 3.438 \text{ et nb d'itérations=4}$$

Comparaison pour une précision au cent millième :

- Balayage :

$$\alpha \approx 3.43771 \text{ et nb d'itérations=43772}$$

- Dichotomie :

$$\alpha \approx 3.43771 \text{ et nb d'itérations=18}$$

- Newton-Raphson :

$$\alpha \approx 3.43771 \text{ et nb d'itérations=4}$$

Comparaison pour une précision au dix millionième :

- Balayage :

$$\alpha \approx 3.4377073 \text{ et nb d'itérations=4377074}$$

- Dichotomie :

$$\alpha \approx 3.4377072 \text{ et nb d'itérations=25}$$

- Newton-Raphson :

$$\alpha \approx 3.4377072 \text{ et nb d'itérations=5}$$