

Algorithmes et résolution de problèmes au Moyen Âge

Marc Moyon

XLIM - UMR CNRS 7252, Université de Limoges & IREM de Limoges

Journées académiques
« Algorithmique et numérique au collège »
IREM de Lille

Rudolf Bkouche *in memoriam*



Plan

- 1 Quelques éléments de contexte
- 2 Arithmétique élémentaire & géométrie pratique
- 3 Algorithmes et résolutions arithmétiques
- 4 Algorithmes et mathématiques récréatives
- 5 Conclusions



Quelques éléments de contexte - Alain Rey

Une fausse apparence grecque, pour le latin médiéval *algorithmus*, accordé au *rithm-* de *arithmetica*, cache la forme plus correcte de l'espagnol ancien *algorismo*, *alguarismo*, francisé en *augorisme* vers 1230, puis *algorisme* (chez Rabelais) et enfin, après *algoritme* (1554), la graphie hellénisée **ALGORITHME**. Aucun « rythme », pourtant, dans ce vocable, mais bien le nom du mathématicien et astronome promoteur du mot algèbre, **Muhammad ben Moussa al-Khāwrizmi** (ou Hwārismi), originaire du Hwārizm, où il est né en 780 (aujourd'hui Khiva, en Ouzbékistan), et qui vécut à Bagdad, où il est mort en 850 de l'ère chrétienne. (...)



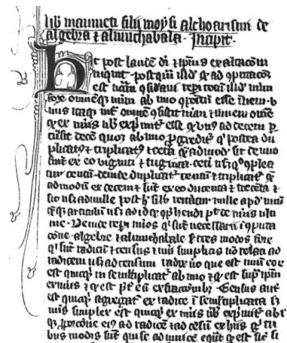
Quelques éléments de contexte - Alain Rey

Ce n'est qu'au début du XIX^e siècle, avec l'évolution des mathématiques et de l'algèbre, que le mot **algorithme** fut choisi pour désigner toute suite ordonnée de règles opératoires explicites, avec la création d'un adjectif **algorithmique** (1815). Avec le développement de la logique formelle et, pour un public large, de l'informatique, l'hommage discret à l'arithméticien arabe qu'est le terme **algorithme** a pris une importance extrême, car toute opération informatique suppose une suite finie, ordonnée, formalisée d'instructions élémentaires, un **algorithme**, que nous pourrions appeler plus exactement l'*algorithme*.



Quelques éléments de contexte - Jacques Sesiano

La transcription latine (fautive) du nom de son auteur [à propos de l'arithmétique d'al-Khwārizmī], apparaissant sous les variantes *algorismus*, *algorizmus*, *algoritmus*, vint à désigner le calcul arithmétique lui-même, car on avait oublié qu'il s'agissait du nom d'une personne. Il s'est conservé aujourd'hui dans le mot **algorithme**, augmenté d'un h du fait d'une supposée étymologie grecque, à nouveau due à la méconnaissance de l'origine du terme ; il faudra attendre l'étude des manuscrits mathématiques médiévaux pour que s'en dévoile la véritable étymologie.



Quelques éléments de contexte - Donald Knuth

« Je suis convaincu (...) que l'informatique est surtout l'étude des algorithmes.

(...) J'ai tendance à penser comme **algorithme** le champ complet des concepts ayant trait à des processus bien définis, que ce soit les structures de données sur lesquelles on agit ou les structures de contrôle de la suite d'opérations à effectuer (...)

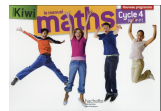
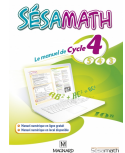
Les algorithmes donnés pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division décimales – si on peut appeler cela des **algorithmes**, car ils omettent plus d'un détail, bien qu'ils aient été écrits par al-Khwârizmî lui-même ! – ont été étudiés en détail par Youshkevitch et Rozenfeld. »

Et il écrit d'al-Bîrûnî qu'il est « (...) philosophe, historien, voyageur, géographe, linguiste et **informaticien**, auteur d'environ 150 livres. Le terme "**informaticien**" fait partie de cette liste pour son intérêt pour les calculs efficaces. »



Quelques éléments de contexte - Dans les manuels

- 1 Un **algorithme** est une liste ordonnée et logique d'instructions permettant de résoudre un problème ;
Sésamath, Cycle 4, Magnard p. 343.
- 2 Un **algorithme** est une liste ordonnée d'instructions très simples. Si on suit soigneusement les instructions, on arrive forcément à la réalisation souhaitée (création d'un objet, solution d'un problème, etc.) ;
Delta Mathématiques, Cycle 4, Belin, p. 444.
- 3 Un **algorithme** est une suite d'instructions qui sont exécutés dans un ordre précis. Cette suite d'instructions permet en partant d'un état initial d'aboutir à un état final (résultat) ;
Kiwi, Cycle 4, Hachette Éducation, p. 154.



Seules références pseudo-historiques : Crible d'Ératosthène, chiffrement/déchiffrement de César!!!

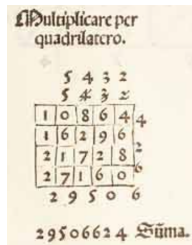
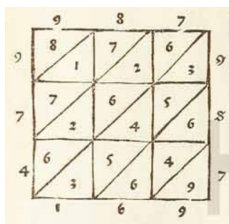
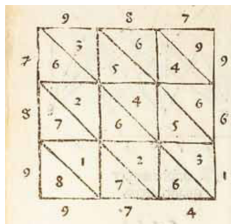
Quelques éléments de contexte - Dans les I.O.



« La **mise en perspective historique** de certaines connaissances (numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves. » (Mathématiques, Cycle 3, 26/11/15, p.198)

« Mieux comprendre la société dans laquelle ils vivent exige aussi des élèves qu'ils s'inscrivent dans le temps long de l'histoire. C'est ainsi qu'ils sont davantage confrontés à la **dimension historique** des savoirs mais aussi aux défis technologiques, sociétaux et environnementaux du monde d'aujourd'hui. » (*Programme pour le cycle 4, Volet 1 : les spécificités du cycle des approfondissements*, 26/11/15, p.3)

Les algorithmes opératoires : exemple de la multiplication



Luca Pacioli, *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, Wolfenbüttel, 1494.

cf. Lire Chorlay, R. & al., « Tâches spécifiquement algorithmiques en cycle 3 : trois séances sur la multiplication par jalousie », *Grand N*.

Problèmes de géométrie pratique 1 : le carré

Et si on te dit : j'ai retranché l'aire de ce [quadrilatère] de ses côtés et il est resté trois. Quel est alors chacun de ses côtés ?

$$2 \rightarrow 2 \times 2 = 4$$

$$4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2$$

$$4 \rightarrow 4 - 3 = 1$$

$$1 \rightarrow \sqrt{1} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2 = 3 = c \\ 2 - 1 = 1 = c \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2 = 3 = c \\ 2 - 1 = 1 = c \end{array} \right.$$

Problèmes de géométrie pratique 1 : le carré

Et si on te dit : j'ai retranché l'aire de ce [quadrilatère] de ses côtés et il est resté trois. Quel est alors chacun de ses côtés ?

Si x est le côté

$$x \times x = x^2$$

$$4x - x^2 = 3$$

$$x^2 + 3 = 4x \text{ (Type 5 : } ax^2 + p = qx)$$

Problèmes de géométrie pratique 2 : le triangle obtusangle

Et si on te dit :

l'aire est vingt-quatre, la hauteur est trois et un cinquième.

Quelle est la base ?

$(A, 3\frac{1}{5}) \rightarrow A \div 3\frac{1}{5}$	$(A, h) \rightarrow A \div h.$
$\rightarrow 2 \times (A \div 3\frac{1}{5}) = b$	$\rightarrow 2 \times (A \div h) = b$

$A \rightarrow 2 \times A = 48$	$A \rightarrow 2 \times A$
$\rightarrow 48 \div 3\frac{1}{5} = b$	$\rightarrow 2 \times A \div h = b$

Problèmes de géométrie pratique 2 : le triangle obtusangle

Et si on te dit :

l'aire est vingt-quatre et la base est quinze.

Quelle est la hauteur ?

$$(A, b) \rightarrow A \div (b \div 2) = h$$

algorithmes vs. formules

Algorithmes et résolutions arithmétiques

Ibn Qunfudh (m.1407)
Hatt an-niqāb ʿan wujūh
aʿmāl al-hisāb
 L'abaissement de la voilette
 sur les formes des opérations
 du calcul



Problème d'âge

Une personne vécut un certain temps.

Si elle avait vécu en plus autant qu'elle vécut, et encore autant, puis $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ de ce qu'elle a vécu, et encore un an en plus, elle aurait vécu 100 ans.

On cherche combien de temps elle vécut.

$$(100, 1) \rightarrow 100 - 1 = 99$$

Pose 12.

$$\rightarrow 12 + 12 + 12 + \frac{1}{4}\frac{1}{3} \cdot 12 = 43$$

Pour 12 ans, on atteint 43 ans. Pour 99 ans ?

$$\rightarrow 12 \times 99 = 1188$$

$$\rightarrow 1188 \div 43 = \frac{27}{43}27 \quad \text{ou} \quad \rightarrow 99 \div \frac{1}{4}\frac{1}{3}3 \left[= \frac{27}{43}27 \right]$$

Problème du bien (1)

Voici donc le sujet :

Nous avons un bien dont on soustrait le tiers et le quart, il reste huit.

Quel est le bien ?

Prendre 12.	Prendre 24
$12 \rightarrow 12 - \frac{1}{3}\frac{1}{4}.12 = 5$ $8-3 = 5$	$24 \rightarrow 24 - \frac{1}{3}\frac{1}{4}.24 = 10$ $8+2 = 10$
$\rightarrow +2 \times 12 = 24$ $\rightarrow -3 \times 24 = 72$	
$\rightarrow 24 + 72 = 96$ $\rightarrow 3 + 2 = 5$	$\rightarrow 96 \div 5 = 19\frac{1}{5}$

Problème du bien (2)

Voici donc le sujet :

Nous avons un bien dont on soustrait le tiers et le quart, il reste huit.

Quel est le bien ?

Pose 12.

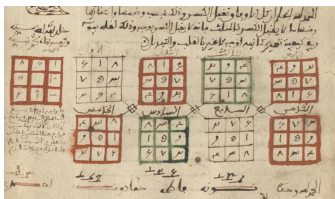
$$12 \rightarrow 12 - \frac{1}{3} \frac{1}{4} \cdot 12 = 5$$

$$? \times 5 = 12$$

$$\rightarrow ? = 2\frac{2}{5}$$

$$2\frac{2}{5} \times 8 = 19\frac{1}{5}$$

Algorithmes et mathématiques récréatives



Rabat, Bibliothèque Royale du Maroc, ms. 53,

p. 161



Libro de abacho de G. Tagliente

dans J. Sesiano, *Récréations mathématiques au*

Moyen Âge, p.92

Problème des fruits et du voyageur (1)

Quelqu'un a cueilli des fruits dans un verger auquel on accède par 7 portes successives.

Lorsqu'il a voulu en sortir, il lui a fallu donner au premier gardien **la moitié** de tous les fruits et **un** en plus.

Au second gardien, la moitié des fruits restants et un en plus.

Il a dû en donner aux cinq autres gardiens de la même manière.

Il ne lui resta plus alors qu'**un** seul fruit.

On demande combien de fruits du verger cette personne a cueillis.

$$1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 + 1 = 2 \rightarrow 2 \times 2 = 4$$

$$4 \rightarrow 4 + 1 = 5 \rightarrow 5 \times 2 = 10$$

Problème des fruits et du voyageur (2)

$$1 \rightarrow 1 + 1 = 2 \rightarrow 2 \times 2 = 4$$

$$4 \rightarrow 4 + 1 = 5 \rightarrow 5 \times 2 = 10$$

$$10 \rightarrow 10 + 1 = 11 \rightarrow 11 \times 2 = 22$$

$$22 \rightarrow 22 + 1 = 23 \rightarrow 23 \times 2 = 46$$

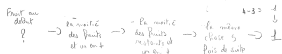
$$46 \rightarrow 46 + 1 = 47 \rightarrow 47 \times 2 = 94$$

$$94 \rightarrow 94 + 1 = 95 \rightarrow 95 \times 2 = 190$$

$$190 \rightarrow 190 + 1 = 191 \rightarrow 191 \times 2 = 382$$

Et inversement, selon ce qui a été proposé, en revenant en arrière, tu pourras résoudre n'importe quelle situation semblable.

Problème des fruits et du voyageur (4)



Donc 7 fois - la moitié des fruits

7 ^e gardien : 3	$(4+1) \times 2 = 10$
6 ^e gardien : 10	$(10+1) \times 2 = 22$
5 ^e gardien : 22	$(22+1) \times 2 = 46$
4 ^e gardien : 46	$(46+1) \times 2 = 94$
3 ^e " : 94	$(94+1) \times 2 = 190$
2 ^e " : 190	$(190+1) \times 2 = 382$
1 ^e " : 382	

Au départ, P avait 382 fruits

On choisit un nombre x
 - on rajoute 1
 - on multiplie le résultat par 2
 on répète ce programme 7 fois.

Ce programme est valable, non seulement pour ce problème, mais aussi pour n'importe quelle situation semblable.

Pour exemple, on met le 1 à la place de la moitié :
 gardien 5 portes au lieu de 7.
 gardien 2 fruits au lieu de 1.
 reste 2 fruits au lieu de 1.

7^e gardien : 2 fruits $\downarrow 1 + 1$
 6^e gardien : 4 fruits $\downarrow 2 + 1$
 5^e gardien : 8 fruits $\downarrow 4 + 1$
 4^e gardien : 16 fruits $\downarrow 8 + 1$
 3^e gardien : 32 fruits $\downarrow 16 + 1$
 2^e gardien : 64 fruits $\downarrow 32 + 1$
 1^e gardien : 128 fruits $\downarrow 64 + 1$
 Il avait 254 fruits au départ
 $254 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = 247$ fruits

7 portes = 7 gardiens

1^{er} gardien = la moitié de tous les fruits + 1 en plus

2^{ème} gardien = la moitié des fruits restant + 1 en plus

...

reste 1 pour lui

\rightarrow il reste un fruit pour lui.

$4 - 3 = 1 \rightarrow$ il en donne 3 au dernier gardien

Problème des fruits et du voyageur (5)

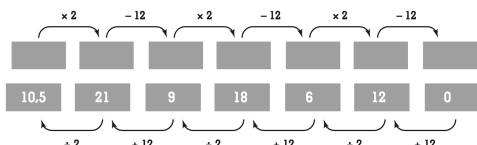


Classe de 3^e, Collège M. Genevoix,

Couzeix (87)

Commerce à Lucques, Florence et Pise

Un homme partit commercer à Lucques, il y fit le double et y dépensa 12 deniers.
Puis il quitta cette ville pour se rendre à Florence. Il y fit le double et y dépensa 12 deniers.
Lorsqu'il revint à Pise, il y fit le double et y dépensa 12 deniers.
Et il est proposé que rien ne lui resta.
On demande combien il possédait au départ de son voyage.



Le jour inconnu

Si tu veux savoir en quel **jour** quelqu'un a embrassé son amie, dis-lui de doubler le jour, d'ajouter 1, de multiplier le tout par 5, puis le résultat par 10, et de soustraire 50 de toute la somme.

Demande ensuite combien de fois on peut certainement soustraire 100 de toute la somme.

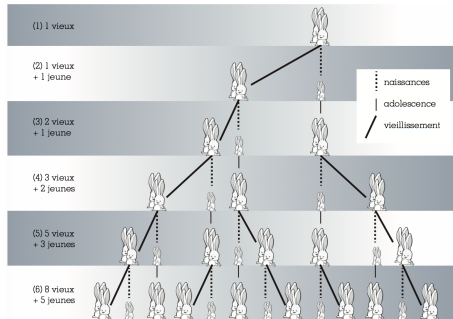
Si c'est une fois, ce sera dimanche, si deux, lundi, si trois, mardi et ainsi de suite.

$$\begin{aligned}j &\rightarrow j \times 2 \\&\rightarrow j \times 2 + 1 \\&\rightarrow (j \times 2 + 1) \times 5 \\&\rightarrow ((j \times 2 + 1) \times 5) \times 10 \\&\rightarrow ((j \times 2 + 1) \times 5) \times 10 - 50\end{aligned}$$

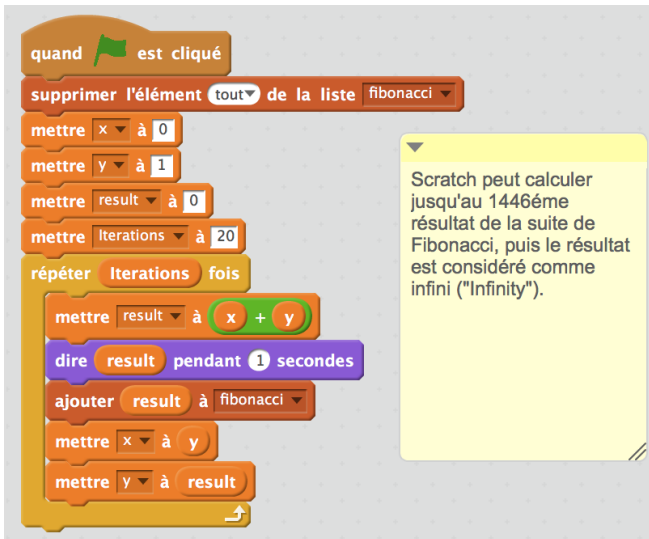
Problème des lapins

Quelqu'un plaça une paire de lapins dans un endroit clos de tous côtés afin de savoir combien de descendants cette seule paire engendrerait en une année.

Or, il est dans leur nature de mettre au monde une nouvelle paire chaque mois, et les lapins ont des descendants deux mois après leur naissance.



Algorithme qui détermine la suite des nombres de Fibonacci.



The image shows a Scratch script designed to calculate the Fibonacci sequence. The script starts with a 'when green flag is clicked' event block. It then performs several initialization steps: 'delete all elements from the fibonacci list', 'set x to 0', 'set y to 1', 'set result to 0', and 'set iterations to 20'. A 'repeat' loop block is used to iterate 20 times. Inside the loop, the script calculates the next Fibonacci number by adding x and y, displays the result for 1 second, adds the result to the 'fibonacci' list, updates x to y, and updates y to the new result. A yellow note on the right side of the script explains that Scratch can calculate up to the 1446th result of the Fibonacci sequence, after which the result is considered infinite ('Infinity').

```
quand [drapeau vert] est cliqué
supprimer l'élément [tout] de la liste [fibonacci]
mettre x à 0
mettre y à 1
mettre result à 0
mettre iterations à 20
répéter iterations fois
  mettre result à (x + y)
  dire result pendant 1 secondes
  ajouter result à fibonacci
  mettre x à y
  mettre y à result
```

Scratch peut calculer jusqu'au 1446^{ème} résultat de la suite de Fibonacci, puis le résultat est considéré comme infini ("Infinity").

Scratch 2 Fichier Modifier Fenêtre

Scratch 2 Offline Editor

scène suite_lapin_fibo

fibonacci

1	2
3	5
8	13
21	34
55	89
144	233
377	

longueur: 12

Lutins

Nouveau lutin:

lapin-beige

Scène 1 arrière-plan

Nouvel arrière-pl

Script

Mouvement

Apparence

Sons

Style

Données

Événements

Contrôle

Captures

Opérateurs

Ajouter blocs

quand le drapeau vert est cliqué

mettre u1 à 1

mettre u2 à u1

mettre u3 à 0

supprimer l'élément tout de la liste fibonacci

demandez Combien de mois? et attendez

répéter réponse fois

mettre u3 à u1 + u2

mettre u1 à u2

mettre u2 à u3

insérer u3 en position dernier de la liste fibonacci

Merci



marc.moyon@unilim.fr