JOURNÉES ACADÉMIQUES DE L'IREM DE LILLE

Dans le cadre du Plan Académique de Formation 2019/2020
du Rectorat de Lille

Conférences et ateliers : 13 et 14 février 2020

Université de Lille - Campus Cité Scientifique - Bâtiment M1

IREM Lille

Université de Lille

académie Lille

Conférence grand public
Maths et billard
13 février 2020 à 18h00

Secrétariat IREM : 03 20 43 41 82
03 20 43 41 81
irem@univ-lille.fr
https://irem.univ-lille.fr/ja

Exponentielle et intérêts composés : un point de vue historique sur le nouveau programme de 1^{ere}

François Goichot et Jean-Pierre Lubet

LAMAV - UPHF et IREM de Lille / IREM de Lille

Journées académiques de l'IREM, 14 février 2020

FG et JPL, groupe EMTA de l'IREM de Lille

FG et JPL, groupe EMTA de l'IREM de Lille

Remerciements à Pierre Ageron (IREM de Caen), Jean-Pierre Friedelmeyer (Strasbourg), Alain Juhel, Jacqueline Lubet (Lille)

FG et JPL, groupe EMTA de l'IREM de Lille

Remerciements à Pierre Ageron (IREM de Caen), Jean-Pierre Friedelmeyer (Strasbourg), Alain Juhel, Jacqueline Lubet (Lille)

Commission Inter-IREM Épistémologie et Histoire des Mathématiques

N. B. tous les portraits de mathématiciens dans ce diaporama viennent du site MacTutor

L'exponentielle dans le (nouveau) programme de 1^{ere}

“La notation exponentielle et les fonctions exponentielles apparaissent vers la fin du XVII^{e} siècle, procédant d'une volonté de traiter des phénomènes de croissance comparables à ceux des intérêts composés. La modélisation de ces situations fait naturellement apparaître la caractérisation de la fonction exponentielle comme seule fonction vérifiant l'équation différentielle $y' = y$ et la condition initiale $y(0) = 1$”

L'exponentielle dans le (nouveau) programme de 1^{ere}, suite

- Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise. Notation $\exp(x)$
- Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Nombre e. Notation e^x
  $(\dots)$
- Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler. Détermination d'une valeur approchée de e à l'aide de la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Fonction(s) exponentielle(s) : définitions possibles

- fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$
- fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y)$
- somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
- prolongement à $\mathbb{R}$ de $\frac{p}{q} \mapsto a^{\frac{p}{q}}$
- réciproque du logarithme

L'exponentielle dans le programme de 1^{ere}

Exponentielle et intérêts composés

Les phénomènes exponentiels

2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6

Tablette MLC 02078 (1900-1600 avant notre ère).

Les phénomènes exponentiels

- Les questions d'intérêts composés apparaissent aussi dans des tablettes de la même époque [D. Justens]
- Le problème des grains de riz (ou de blé) sur l'échiquier est plus difficile à dater, mais remonte au moins au Moyen Âge

Archimède (-287 à -212), *L'Arénaire*

Traduction de ver Eecke, 1933

Lorsque des nombres sont en proportion continue à partir de l'unité, et que certains de ces nombres sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même progression, éloigné du plus grand des nombres multipliés d'autant de nombres que le plus petit des nombres multipliés l'est de l'unité dans la progression, et éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés de l'unité.

Archimède, *L'Arénaire*

Traduction de Peyrard, 1807

Si des nombres sont continuellement proportionnels à partir de l'unité, et si deux termes de cette progression sont multipliés l'un par l'autre, le produit sera un terme de cette progression éloigné d'autant de termes du plus grand facteur que le plus petit facteur l'est de l'unité. Ce même produit sera éloigné de l'unité d'autant de termes moins un que les deux facteurs le sont ensemble de l'unité.

Archimède, *L'Arénaire*

Traduction de Peyrard, 1807

Si des nombres sont continuellement proportionnels à partir de l'unité, et si deux termes de cette progression sont multipliés l'un par l'autre, le produit sera un terme de cette progression éloigné d'autant de termes du plus grand facteur que le plus petit facteur l'est de l'unité. Ce même produit sera éloigné de l'unité d'autant de termes moins un que les deux facteurs le sont ensemble de l'unité.

autrement dit : $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Exponentielle et intérêts composés

La notation exponentielle

Avant… exemple Viète, *In artem Analyticem Isagoge* (1591), traduction d'A. Vasset (1630)

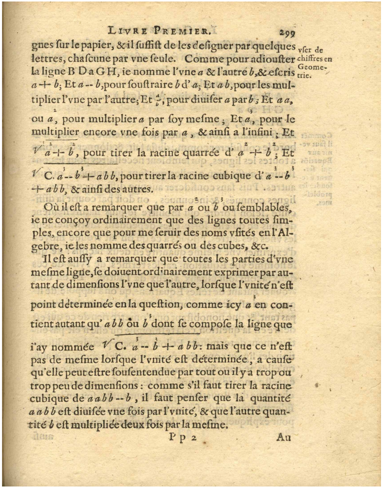
180 ALGEBRE NOVVELLE.

ZETETIQVE XII.

TReuuer en nombre trois quarrez, tels que le plan plan qui eſt fait ſous deux d'iceux, adjouſté à ce qui eſt fait de l'aggregé des deux, par le quarré d'vne longueur donnée, faſſe vn quarré.

Soit la longueur donnee X. & que le premier quarré ſoit A q. — X par 2 A + X q. duquel la racine eſt A — X. le ſecond quarré ſoit A q. duquel la racine eſt A. le troiſieſme 4 A q. — X par 4 A + 4 X q. Doncques de la multiplication du premier par le ſecond, adjouſtant la ſomme du premier & du ſecond multipliee par X q. lon produira le quarré de A q. — X par A + X q. racine plane. Et de la multiplication du ſecond par le troiſieſme, y adiouſtant la ſomme du ſecond & du troiſieſme multipliee par X q. lon produira le quarré de 2 A q. — X par A + 2 X q. racine plane. Et finalement de la multiplication du premier par le troiſieſme, y adiouſtant la ſomme du premier & du troiſieſme multipliee par X q. lon produira le quarré de 2 A q. — X par 3 A + 3 X q. qui eſt auſſi racine plane. Soit donc la racine du troiſieſ-

La notation exponentielle



LIVRE PREMIER. 299

gnes ſur le papier, & il ſuffiſt de les deſigner par quelques lettres, chaſcune par vne ſeule. Comme pour adiouſter la ligne BD a GH, ie nomme l'vne a & l'autre b, & eſcris $a + b$; Et $a - b$, pour ſouſtraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par ſoy meſme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'$a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d'$a^3 - b^3 + abb$, & ainſi des autres.

vſer de chiffres en Geometrie.

Où il eſt a remarquer que par a^2 ou b^3 ou ſemblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes ſimples, encore que pour me ſeruir des noms vſités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il eſt auſſy a remarquer que toutes les parties d'vne meſme ligne, ſe doiuent ordinairement exprimer par autant de dimenſions l'vne que l'autre, lorſque l'vnité n'eſt point determinée en la queſtion, comme icy a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont ſe compoſe la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$: mais que ce n'eſt pas de meſme lorſque l'vnité eſt determinée, a cauſe qu'elle peut eſtre ſouſentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimenſions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penſer que la quantité $aabb$ eſt diuiſée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b eſt multipliée deux fois par la meſme.

Pp 2 Au

René Descartes, *La Géométrie* (1637)

N. B. Les exposants sont forcément entiers positifs

La notation exponentielle

La notation moderne pour les exposants fractionnaires ou négatifs est introduite par Newton dans une lettre de 1676 à Oldenbourg

(Florian Cajori, *History of Mathematical Notations* vol. 1 (1928), n° 308)

Exponentielle et intérêts composés

La notion de fonction

Le contexte dans lequel [Jean] Bernoulli élabore sa version [1697] du calcul exponentiel (comme la version de Leibniz) est le calcul différentiel publié par Leibniz en 1684. De nos jours, on connaît le calcul, différentiel et intégral comme une théorie qui concerne les fonctions, leurs dérivées, et leurs intégrales, lesquelles sont aussi des fonctions. Dans sa forme Leibnizienne, le "calculus" était tout à fait différent : c'était une théorie des variables et de leurs différentielles. Les variables sont des quantités variables dans des situations relatives à des problèmes géométriques ou mécaniques ; ainsi, la hauteur ou la vitesse d'un projectile, ou les coordonnées d'un point sur une courbe, sont des variables. Les différentielles sont les petites augmentations (incréments) ou diminutions (décréments) de ces variables, qui se produisent si l'on considère les états successifs (ou infiniment proches) (d'un projectile en vol, ou de la position de points sur la courbe)

H. Bos, 1996, trad. JPL

La notion de fonction

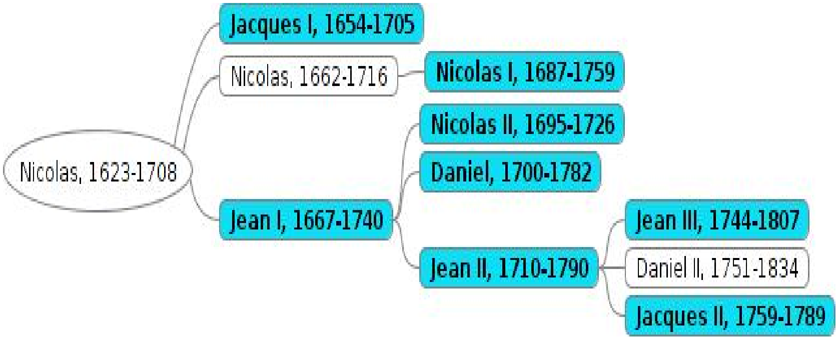
Le mot commence à être employé par Leibniz (1694) et Jacques Bernoulli (1698). La notion se précise dans les échanges entre Leibniz et Jean Bernoulli.

En 1718, Jean Bernoulli précisera la définition : "on appelle ici Fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes". Il introduit à la même époque la notation Φx. (Itard)

Exponentielle et intérêts composés

Jacques (Jacob) Bernoulli, 1654 - 1705

La famille Bernoulli



Wikipédia, article *Jacques Bernoulli* :

Bernoulli a découvert la constante e par l'étude d'une question concernant les intérêts composés où il fallait trouver la valeur de l'expression suivante (qui est en fait e) :

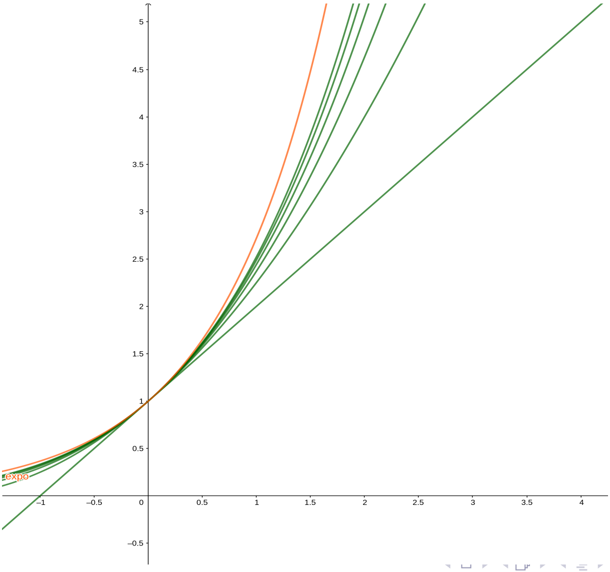
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Soit comme exemple, un compte qui a pour valeur initiale 1 € et rapporte 100 pour cent d'intérêt par an. Au bout d'un an, le compte est de 2 € ; mais si l'intérêt est composé tous les six mois, 1 € est multiplié par 1,5, ce qui donne 1 € $\times 1,5^2 = 2,25$ € . Si l'intérêt est composé chaque trimestre, 1 € $\times 1,25^4 = 2,4414\ldots$ € et s'il est mensuel,
1 € $\times(1,08333333\ldots)^{12} = 2,613035\ldots$ € .

Wikipédia, article *Jacques Bernoulli*, suite :

Bernoulli a remarqué que cette suite tend vers une limite (le taux d'intérêt effectif) lorsque les intervalles deviennent de plus en plus petits. Pour un intérêt composé chaque semaine, on trouve 2,692 597 € , pour un intérêt composé chaque jour, on trouve 2,714 567 € . Si n est le nombre d'intervalles de composition, avec un intérêt de 100 % pour chaque intervalle, la limite lorsque n devient grand, est le nombre d'Euler qui par la suite a été noté e. Pour des intérêts composés continûment, la valeur du compte atteindra 2,718 281 8 € . Plus généralement, un compte dont la valeur initiale est 1 € , et un taux R, aura au bout d'un an la valeur finale e^R € lorsqu'on découpe l'année en une infinité de périodes de composition infiniment courtes.

ILLUSTRATION MODERNE



Bernoulli et les intérêts composés

Alterius naturæ hoc Problema eſt: Quæritur, ſi Creditor aliquis pecuniæ ſummam fœnori exponat, ea lege, ut ſingulis momentis pars proportionalis uſuræ annuæ ſorti annumeretur, quantum ipſi finito anno debeatur? Reſp. ſi ſors vocetur a, uſura annua b, Creditori elapſo anno debebitur, $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2\,in\,3\,aa}+\frac{b4}{2\,in\,3\,in\,4\,a3}+\frac{b5}{2\,in\,3\,in\,4\,in\,5\,a4}$ &c. in infinitum: quæ ſumma major eſt, quam $a+b+\frac{bb}{2a}$, ut patet; ſed minor quam $a+b+\frac{bb}{2a-b}$, quoniam $\frac{bb}{2a-b}$ eſt ſumma progreſſionis Geometricæ $\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2\,in\,2\,aa}+\frac{b4}{2\,in\,2\,in\,2\,a3}$ &c. quæ noſtra ſerie $\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2\,in\,3\,aa}+\frac{b4}{2\,in\,3\,in\,4\,a3}$ &c. major eſt. Idcirco ſi uſura ſit ſubvigecupla ſortis, ſeu $a=20$, & $b=1$, debebitur poſt annum plus quam $21\frac{1}{40}$, & minus quam $21\frac{1}{39}$: ſi $a=b$, debebitur plus quam $2\frac{1}{2}a$, & minus quam $3a$. Obſervo etiam, præſentem ſeriem in re Geometrica ſuum uſum habere: nam ſi ad axem curvæ Logorithmicæ duæ rectæ applicentur, quarum minor dicatur a, ſitque portio axis inter utramque applicatam ad portionem ejusdem inter applicatam quamcunque & reſpectivam tangentem in conſtanti ratione b ad a: exprimetur major applicatarum per eandem hanc ſeriem $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2\,in\,3\,aa}$ &c.

Porro ſeriei hujus infinitæ occaſione recordor Problematis il-

Bernoulli et les intérêts composés

Ce texte a été écrit en 1685, publié dans les *Acta Eruditorum* en mai 1690

D'une autre nature est ce problème :
On demande, si un créancier propose une somme d'argent à prêter, à la condition que, à chaque moment (durée), une part proportionnelle de l'intérêt de l'année soit ajoutée au capital ; quelle quantité de celui-ci sera-t-elle due à la fin de l'année ?
Réponse. Si le capital est appelé a, l'intérêt annuel b, l'année écoulée, il sera dû au créancier

$$a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 3aa}+\frac{b^4}{2\cdot 3\cdot 4a^3}+\frac{b^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^4}, \&c \quad \text{à l'infini}$$

et la somme est plus grande que $a+b+bb:2a$ comme il apparaît : mais plus petite que $a+b+bb\ :(2a-b)$, puisque $bb\ :(2a-b)$ est la somme de la progression géométrique

$$\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 2aa}+\frac{b^4}{2\cdot 2\cdot 2a^3}+\&c$$

Traduction Jacqueline Lubet

Pour cette raison si l'intérêt est moins que le vingtième du capital soit $a = 20$ et $b = 1$, il sera dû après un an plus que $21\,\dfrac{1}{40}$ et moins que $21\dfrac{1}{39}$; si $a = b$ il sera dû plus que $2\frac{1}{2}\,a$ et moins que $3a$. En plus j'observe que la série actuelle a son utilité en géométrie : en, effet si deux droites sont dirigées selon l'axe d'une courbe logarithmique, dont la plus petite est appelée a et soit la portion de l'axe entre l'une et l'autre dans le rapport constant de b à a, à la portion du même entre une appliquée quelconque et la tangente respective : la plus grande des appliquées sera exprimée par cette même série

$$a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 3aa} + \&c \quad \text{à l'infini}$$

Traduction Jacqueline Lubet

D'une autre nature est ce problème :
On demande, si un créancier propose une somme d'argent à prêter, à la condition que, à chaque moment (durée), une part proportionnelle de l'intérêt de l'année soit ajoutée au capital ; quelle quantité de celui-ci sera-t-elle due à la fin de l'année ?
Réponse. Si le capital est appelé a, l'intérêt annuel b, l'année écoulée, il sera dû au créancier

$$a+b+\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 3a^2}+\frac{b^4}{4!\,a^3}+\frac{b^5}{5!\,a^4}, \&c \quad \text{à l'infini}$$

et la somme est plus grande que $a+b+\dfrac{b^2}{2a}$ comme il apparaît : mais plus petite que $a+b+\dfrac{b^2}{2a-b}$, puisque $\dfrac{b^2}{2a-b}$ est la somme de la progression géométrique

$$\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{4a^3}+\frac{b^4}{8a^3}+\&c$$

Traduction Jacqueline Lubet, notations modernisées

Pour cette raison si l'intérêt est moins que le vingtième du capital soit $a = 20$ et $b = 1$, il sera dû après un an plus que $21\,\dfrac{1}{40}$ et moins que $21\,\dfrac{1}{39}$; si $a = b$ il sera dû plus que $2\frac{1}{2}\,a$ et moins que $3a$. En plus j'observe que la série actuelle a son utilité en géométrie : en, effet si deux droites sont dirigées selon l'axe d'une courbe logarithmique, dont la plus petite est appelée a et soit la portion de l'axe entre l'une et l'autre dans le rapport constant de b à a, à la portion du même entre une appliquée quelconque et la tangente respective : la plus grande des appliquées sera exprimée par cette même série

$$a + b + \frac{b^2}{2a} + \frac{b^3}{3!\,a^2} + \&c \quad \text{à l'infini}$$

Traduction Jacqueline Lubet, notations modernisées

L'exponentielle dans le (nouveau) programme de 1^{ere}

Reformulation proposée par Pierre Ageron :

"La notation exponentielle et les fonctions exponentielles **sont apparues** vers la fin du XVII^e siècle, procédant d'une volonté de traiter des phénomènes de croissance comparables à ceux des intérêts composés. La modélisation de ces situations **fait naturellement apparaître** la caractérisation de la fonction exponentielle comme seule fonction vérifiant l'équation différentielle $y' = y$ et la condition initiale $y(0) = 1$"

Exponentielle et intérêts composés

Léonard Euler, 1707 - 1783

La lettre e

La lettre e pour désigner la base du logarithme népérien, est utilisée pour la première fois par Euler dans un bref texte, *Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta* (Réflexions sur des expériences récentes sur la mise à feu des canons, E853), écrit fin 1727 ou début 1728, publié seulement dans les *Œuvres posthumes* (1862) :

> *Scribatur pro numero cujus logarithmus est unitas, e, qui est 2,7182817. . . cujus logarithmus secundum Vlacq. est 0,4342944.*

La première occurrence publiée de e est, toujours par Euler, sa *Mécanique* (1736, E15)

La lettre e

Voir l'étude plus détaillée et plus large d'Alain Herreman et coll., *Les encarts historiques dans les manuels de mathématiques*

Exponentielle et intérêts composés

L. Euler, 1748 : *Introductio in Analysin Infinitorum*

CHAPITRE VI.

Des Quantités exponentielles & des Logarithmes.

96. Quoique la connoiſſance des fonctions tranſcendantes doive faire un des objets du calcul intégral, cependant il ſera à propos de traiter ici de quelques eſpeces qui ſe préſentent plus fréquemment, & qui préparent la voie à pluſieurs recherches. Nous conſidérerons donc d'abord les quantités exponentielles, ou les puiſſances dont l'expoſant eſt une quantité variable ; car il eſt clair que ces ſortes de quantités ne peuvent être rapportées aux fonctions algébriques, puiſque celles-ci n'admettent que des expoſans conſtants. On diſtingue pluſieurs eſpeces de quantités exponentielles, ſuivant que l'expoſant ſeul, ou que l'expoſant avec le nombre qu'il affecte eſt une quantité variable ; a^z eſt de la premiere eſpece, & y^z de la ſeconde. De plus, l'expoſant même peut être une quantité exponentielle, comme dans les formules a^{a^z} ; a^{y^z} ; y^{a^z} ; x^{y^z}. Nous ne multiplierons pas davantage les eſpeces de ces grandeurs ; car leur nature ſera ſuffiſamment connue, après que nous aurons traité ſeulement la premiere eſpece.

97. Soit donc propoſée la quantité exponentielle a^z, ou ce qui revient au même, une puiſſance de la conſtante a, qui ait pour expoſant la variable z. Cet expoſant z renfermant tous les nombres déterminés, il eſt évident que ſi à la place de z, on ſubſtitue ſucceſſivement tous les nombres entiers poſitifs, on obtiendra pour a^z les valeurs déterminées a^1 ; a^2 ; a^3 ; a^4 ; a^5 ; a^6 ; &c ; & ſi l'on met pour z les nombres négatifs -1, -2, -3, &c, la quantité a^z deviendra ſuc-

Exponentielle et intérêts composés

La méthode d'Euler

Euler : *Institutiones Calculi Integralis*, 1768

Traduction : Dominique Tournès. Extrait de : Une approche graphique de la méthode d'Euler, *in De grands défis mathématiques, d'Euclide à Condorcet*, É. Barbin éd., Vuibert et Adapt-SNES, 2010.

PROBLÈME 85

650. Quelle que soit l'équation différentielle proposée, déterminer de la manière la plus approchée son intégrale complète.

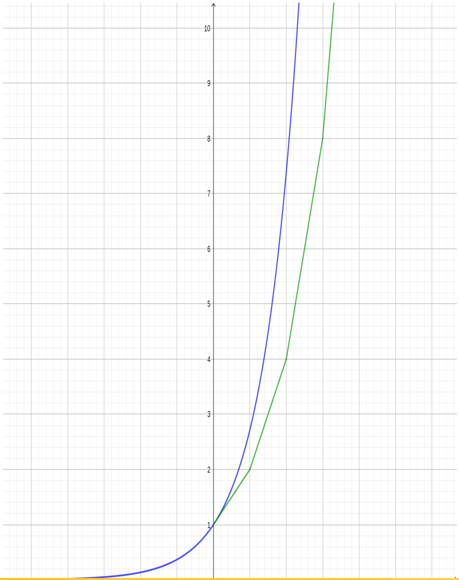
SOLUTION

Soient deux variables x et y, entre lesquelles une équation différentielle est proposée ; cette équation sera de la forme $dy/dx = V$, où V est n'importe quelle fonction de x et y. D'autre part, quand on recherche une intégrale complète, on doit l'interpréter de telle manière que si l'on attribue à x une valeur déterminée, par exemple $x = a$, l'autre variable y doit acquérir une valeur donnée, par exemple $y = b$. Traitons donc d'abord la question de trouver la valeur de y quand on donne à x une valeur peu différente de a, autrement dit cherchons y en posant $x = a + \omega$. Or, puisque ω est une petite quantité, la valeur de y restera elle-même très peu différente de b ; c'est pourquoi, si x varie seulement de a jusqu'à $a + \omega$, il est permis de considérer la quantité V comme constante dans l'intervalle. Ainsi, ayant posé $x = a$ et $y = b$, il viendra $V = A$ et, pour ce mince changement, nous aurons : $dy/dx = A$, d'où, en intégrant, $y = b + A(x-a)$, une constante ayant évidemment été ajoutée de sorte qu'on obtienne $y = b$ pour $x = a$. Décidons donc qu'à $x = a + \omega$ correspondra $y = b + A\omega$.

De même qu'ici, à partir des valeurs données initialement $x = a$ et $y = b$, nous avons trouvé les valeurs suivantes très proches $x = a + \omega$ et $y = b + A\omega$, de même il est permis d'avancer plus loin à partir de ces dernières, au moyen de petits intervalles, jusqu'à ce qu'on parvienne enfin à des valeurs éloignées autant que l'on voudra des valeurs initiales. Afin de faire apparaître plus clairement ces opérations, disposons-les successivement de la manière suivante :

Variables | *Valeurs successives*

La méthode d'Euler



Exponentielle et intérêts composés

Sources primaires

- Léonard Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), traduit par J.-B. Labey, *Introduction à l'analyse infinitésimale* (1796). En deux volumes ; le vol.1 porte le n° E101 dans l'indexation des œuvres d'Euler. Disponible en ligne : Gallica - BNF
- Léonard Euler, *Institutionum calculi integralis* (1768). En trois volumes ; le vol.1 porte le n° E342. Pas de traduction française globale. Disponible en ligne : Gallica - BNF
- Jakob Bernoulli, Quaestiones nonnullae de usuris. . . , 1685. Publication : *Acta Eruditorum* mai 1690. Cf. aussi p. 429-430 du tome 1 des œuvres complètes : Jacobi Bernoulli Basileensis, *Opera*, Genevae, Cramer & Philibert, 1744

Sources secondaires

- Jacques Bair & Valérie Henry, L'exponentielle, une fonction à plusieurs facettes, *Losanges* n° 3, 2009
- Henk J.M. Bos, Johann Bernoulli on Exponential Curves, ca. 1695 - Innovation and Habituation in the Transition from Explicit Constructions to Implicit Functions, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, maart 1996, p. 1-19, en ligne
- J.-L. Chabert éd., *Histoire d'algorithmes*, Belin, 2010
- Jean Itard, *Essais d'histoire des mathématiques*, Librairie Scientifique et Technique, Paris, 1984
- Daniel Justens, *Petite histoire couplée de l'exponentielle et de l'actuariat*, non daté, en ligne
- Dominique Tournès, Une approche graphique de la méthode d'Euler, *De grands défis mathématiques, d'Euclide à Condorcet*, É. Barbin éd., Vuibert et Adapt-SNES, 2010, en ligne