Algorithmes et résolution de problèmes au Moyen Âge

Marc Moyon

XLIM - UMR CNRS 7252, Université de Limoges & IREM de Limoges

Journées académiques
« Algorithmique et numérique au collège »
IREM de Lille

Rudolf Bkouche
in memoriam

Plan

Quelques éléments de contexte - Alain Rey

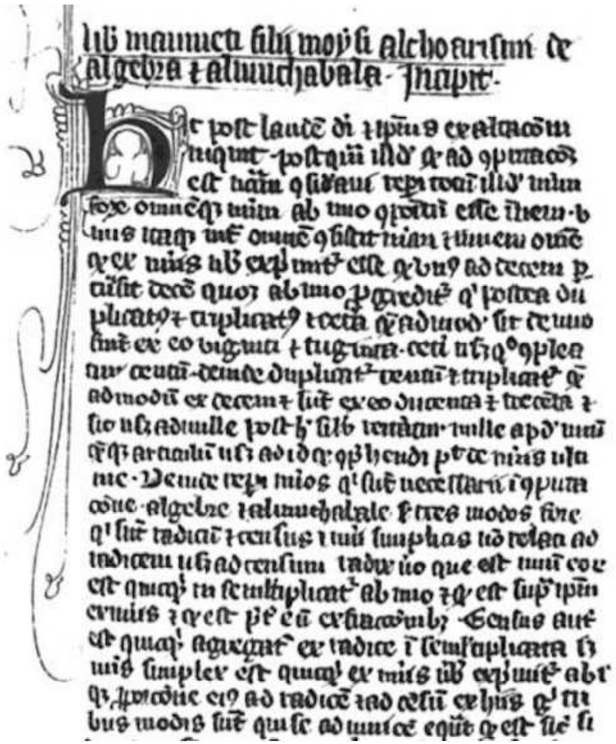
Une fausse apparence grecque, pour le latin médiéval *algorithmus*, accordé au *rithm-* de *arithmetica*, cache la forme plus correcte de l'espagnol ancien *algorismo*, *alguarismo*, francisé en *augorisme* vers 1230, puis *algorisme* (chez Rabelais) et enfin, après *algoritme* (1554), la graphie hellénisée ALGORITHME. Aucun « rythme », pourtant, dans ce vocable, mais bien le nom du mathématicien et astronome promoteur du mot algèbre, Muhammad ben Moussa al-Khāwrizmi (ou Hwārismi), originaire du Hwārizm, où il est né en 780 (aujourd'hui Khiva, en Ouzbékistan), et qui vécut à Bagdad, où il est mort en 850 de l'ère chrétienne. (...)

Quelques éléments de contexte - Alain Rey

Ce n'est qu'au début du XIXe siècle, avec l'évolution des mathématiques et de l'algèbre, que le mot algorithme fut choisi pour désigner toute suite ordonnée de règles opératoires explicites, avec la création d'un adjectif *algorithmique* (1815). Avec le développement de la logique formelle et, pour un public large, de l'informatique, l'hommage discret à l'arithméticien arabe qu'est le terme algorithme a pris une importance extrême, car toute opération informatique suppose une suite finie, ordonnée, formalisée d'instructions élémentaires, un algorithme, que nous pourrions appeler plus exactement l'*algorisme*.

Quelques éléments de contexte - Jacques Sesiano

La transcription latine (fautive) du nom de son auteur [à propos de l'arithmétique d'al-Khwārizmī], apparaissant sous les variantes *algorismus*, *algorizmus*, *algoritmus*, vint à désigner le calcul arithmétique lui-même, car on avait oublié qu'il s'agissait du nom d'une personne. Il s'est conservé aujourd'hui dans le mot algorithme, augmenté d'un h du fait d'une supposée étymologie grecque, à nouveau due à la méconnaissance de l'origine du terme ; il faudra attendre l'étude des manuscrits mathématiques médiévaux pour que s'en dévoile la véritable étymologie.


Liber maumeti filii moysi alchoarismi de algebra et almuchabala. Incipit.

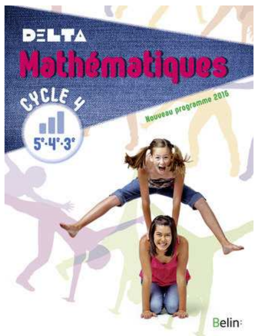
Quelques éléments de contexte - Donald Knuth

« Je suis convaincu (...) que l'informatique est surtout l'étude des algorithmes.
(...) J'ai tendance à penser comme algorithme le champ complet des concepts ayant trait à des processus bien définis, que ce soit les structures de données sur lesquelles on agit ou les structures de contrôle de la suite d'opérations à effectuer (...)
Les algorithmes donnés pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division décimales – si on peut appeler cela des algorithmes, car ils omettent plus d'un détail, bien qu'ils aient été écrits par al-Khwârizmî lui-même ! – ont été étudiés en détail par Youshkevitch et Rozenfeld. »

Et il écrit d'al-Bîrûnî qu'il est « (...) philosophe, historien, voyageur, géographe, linguiste et informaticien, auteur d'environ 150 livres. Le terme "informaticien" fait partie de cette liste pour son intérêt pour les calculs efficaces. »

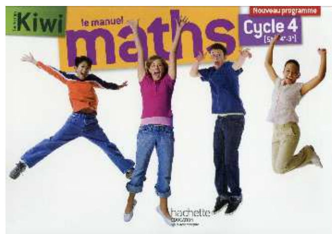
Quelques éléments de contexte - Dans les manuels

1. Un algorithme est une liste ordonnée et logique d'instructions permettant de résoudre un problème ;
   Sésamath, Cycle 4, Magnard p. 343.



2. Un algorithme est une liste ordonnée d'instructions très simples. Si on suit soigneusement les instructions, on arrive forcément à la réalisation souhaitée (création d'un objet, solution d'un problème, etc.) ;
   Delta Mathématiques, Cycle 4, Belin, p. 444.
3. Un algorithme est une suite d'instructions qui sont exécutés dans un ordre précis. Cette suite d'instructions permet en partant d'un état initial d'aboutir à un état final (résultat) ;

   Kiwi, Cycle 4, Hachette Éducation, p. 154.



Seules références pseudo-historiques : Crible d'Ératosthène, chiffrement/déchiffrement de César ! ! !

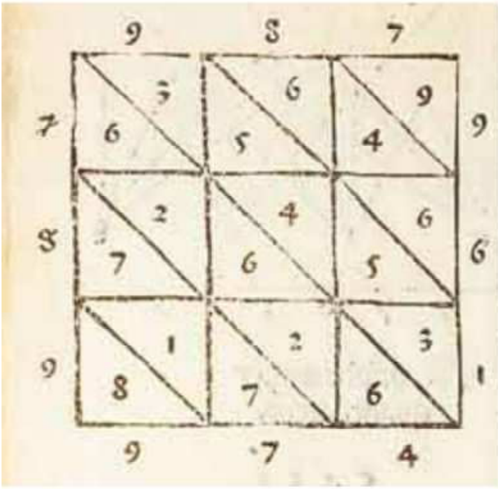
Quelques éléments de contexte - Dans les I.O.

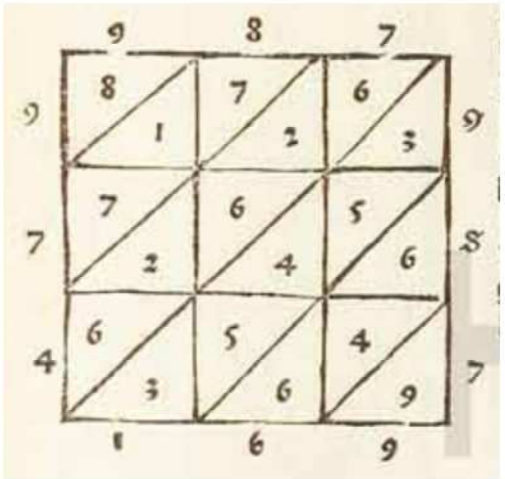
LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

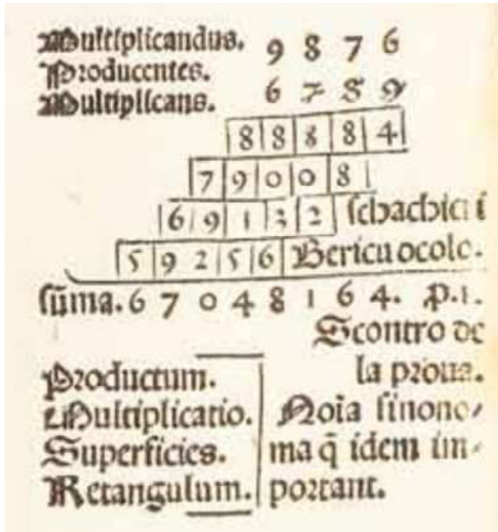
« La mise en perspective historique de certaines connaissances (numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves. » (Mathématiques, Cycle 3, 26/11/15, p.198)

« Mieux comprendre la société dans laquelle ils vivent exige aussi des élèves qu'ils s'inscrivent dans le temps long de l'histoire. C'est ainsi qu'ils sont davantage confrontés à la dimension historique des savoirs mais aussi aux défis technologiques, sociétaux et environnementaux du monde d'aujourd'hui. » (*Programme pour le cycle 4*, Volet 1 : les spécificités du cycle des approfondissements, 26/11/15, p.3)

Les algorithmes opératoires : exemple de la multiplication



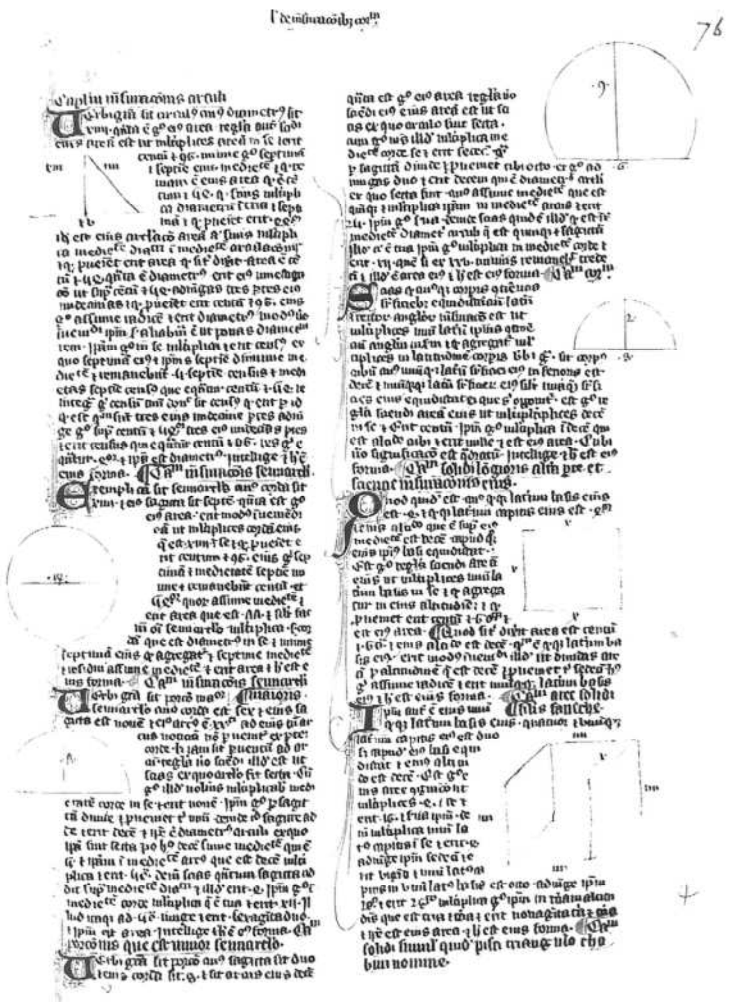




Luca Pacioli, *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, Wolfenbüttel, 1494.

cf. Lire Chorlay, R. & *al.*, « Tâches spécifiquement algorithmiques en cycle 3 : trois séances sur la multiplication par jalousie », *Grand N*.

Problèmes de géométrie pratique



Cambridge University Library, ms. Mm2.18, fol.76r

Problèmes de géométrie pratique 1 : le carré

Et si on te dit : j'ai retranché l'aire de ce [quadrilatère] de ses côtés et il est resté trois. Quel est alors chacun de ses côtés ?

$2 \to 2 \times 2 = 4$
$4 \to \frac{4}{2} = 2$
$4 \to 4 - 3 = 1$
$1 \to \sqrt{1} = 1$

$$\begin{cases} 1 + 2 = 3 = c \\ 2 - 1 = 1 = c \end{cases}$$

Problèmes de géométrie pratique 1 : le carré

Et si on te dit : j'ai retranché l'aire de ce [quadrilatère] de ses côtés et il est resté trois. Quel est alors chacun de ses côtés ?

Si x est le côté

$x \times x = x^2$

$4x - x^2 = 3$

$x^2 + 3 = 4x$ (Type 5 : $ax^2 + p = qx$)

Problèmes de géométrie pratique 2 : le triangle obtusangle

Et si on te dit :
l'aire est vingt-quatre, la hauteur est trois et un cinquième.
Quelle est la base ?

$(A, 3\frac{1}{5}) \to A \div 3\frac{1}{5}$	$(A, h) \to A \div h.$
$\to 2 \times (A \div 3\frac{1}{5}) = b$	$\to 2 \times (A \div h) = b$

$A \to 2 \times A = 48$	$A \to 2 \times A$
$\to 48 \div 3\frac{1}{5} = b$	$\to 2 \times A \div h = b$

Problèmes de géométrie pratique 2 : le triangle obtusangle

Et si on te dit :
l'aire est vingt-quatre et la base est quinze.
Quelle est la hauteur ?

$$(A, b) \to A \div (b \div 2) = h$$

algorithmes *vs.* formules

Algorithmes et résolutions arithmétiques

Ibn Qunfudh (m.1407)
Hatt an-niqāb ᶜan wujūh aᶜmāl al-hisāb
L'abaissement de la voilette sur les formes des opérations du calcul

Problème d'âge

Une personne vécut un certain temps.
Si elle avait vécu en plus autant qu'elle vécut, et encore autant, puis $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ de ce qu'elle a vécu, et encore un an en plus, elle aurait vécu 100 ans.
On cherche combien de temps elle vécut.

$(100, 1) \to 100 - 1 = 99$

Pose 12.

$\to 12 + 12 + 12 + \frac{1}{4}\frac{1}{3}.12 = 43$

Pour 12 ans, on atteint 43 ans. Pour 99 ans ?

$\to 12 \times 99 = 1188$

$\to 1188 \div 43 = \frac{27}{43}27$ ou $\to 99 \div \frac{1}{4}\frac{1}{3}3 [= \frac{27}{43}27]$

Problème du bien (1)

Voici donc le sujet :
Nous avons un bien dont on soustrait le tiers et le quart, il reste huit.
Quel est le bien ?

Prendre 12.	Prendre 24
$12 \to 12 - \frac{1}{3}\frac{1}{4}.12 = 5$ $8-3 = 5$	$24 \to 24 - \frac{1}{3}\frac{1}{4}.24 = 10$ $8+2 = 10$

$\to +2 \times 12 = 24$

$\to -3 \times 24 = 72$

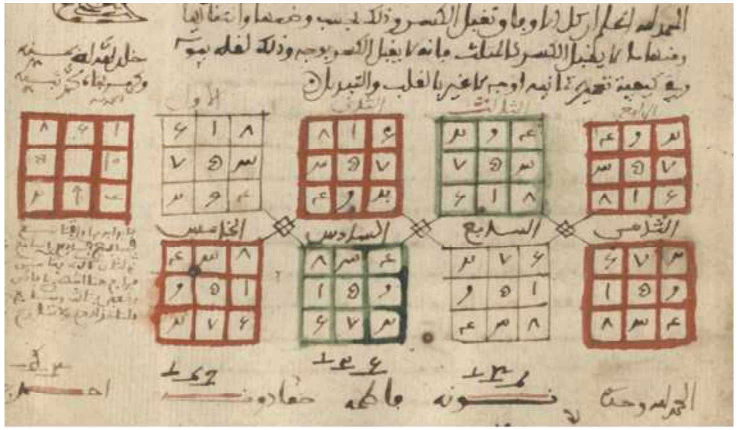
$\to 24 + 72 = 96$ $\to 3 + 2 = 5$	$\to 96 \div 5 = 19\frac{1}{5}$

Problème du bien (2)

Voici donc le sujet :
Nous avons un bien dont on soustrait le tiers et le quart, il reste huit.
Quel est le bien ?

Pose 12.
$12 \to 12 - \frac{1}{3}\frac{1}{4}.12 = 5$
$? \times 5 = 12$
$\to ? = 2\frac{2}{5}$
$2\frac{2}{5} \times 8 = 19\frac{1}{5}$

Algorithmes et mathématiques récréatives



Rabat, Bibliothèque Royale du Maroc, ms. 53, p. 161

Libro de abacho de G. Tagliente

dans J. Sesiano, *Récréations mathématiques au Moyen Âge*, p.92

Problème des fruits et du voyageur (1)

Quelqu'un a cueilli des fruits dans un verger auquel on accède par 7 portes successives.
Lorsqu'il a voulu en sortir, il lui a fallu donner au premier gardien la moitié de tous les fruits et un en plus.
Au second gardien, la moitié des fruits restants et un en plus.
Il a dû en donner aux cinq autres gardiens de la même manière.
Il ne lui resta plus alors qu'un seul fruit.
On demande combien de fruits du verger cette personne a cueillis.

$1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 + 1 = 2 \rightarrow 2 \times 2 = 4$

$4 \rightarrow 4 + 1 = 5 \rightarrow 5 \times 2 = 10$

Problème des fruits et du voyageur (2)

$$1 \to 1 + 1 = 2 \to 2 \times 2 = 4$$
$$4 \to 4 + 1 = 5 \to 5 \times 2 = 10$$
$$10 \to 10 + 1 = 11 \to 11 \times 2 = 22$$
$$22 \to 22 + 1 = 23 \to 23 \times 2 = 46$$
$$46 \to 46 + 1 = 47 \to 47 \times 2 = 94$$
$$94 \to 94 + 1 = 95 \to 95 \times 2 = 190$$
$$190 \to 190 + 1 = 191 \to 191 \times 2 = 382$$

Et inversement, selon ce qui a été proposé, en revenant en arrière, tu pourras résoudre n'importe quelle situation semblable.

Problème des fruits et du voyageur (3)

Résoudre un problème historique grâce à *Fibonacci* (1)

Léonard de Pise, plus connu sous le nom de **Fibonacci**, est un mathématicien du XIIIe siècle. Comme son nom l'indique, il est né à Pise (ville de l'Italie actuelle qui existe encore).
D'après ce que l'on connaît de sa vie, il a beaucoup voyagé dans tout le bassin méditerranéen (Égypte, Provence, Constantinople, Afrique du Nord...). Il y découvre la culture et la science des **pays d'Islam**. Il apprend entre autres la numération indo-arabe (et notamment la forme des chiffres que nous utilisons aujourd'hui), les fractions et de **nombreuses techniques de résolution de problèmes** avec en particulier l'algèbre (de l'arabe *al-jabr*).
Il écrit plusieurs ouvrages en latin (entre 1202 et 1230) qui vont permettre à de nombreux lecteurs d'apprendre les mathématiques venues d'ailleurs.

Portrait imaginé de Fibonacci

Voici un des problèmes du *Liber Abaci* [Livre de calcul], son plus célèbre livre. Sauras-tu le résoudre ?

PROBLÈME DES FRUITS ET DU VOYAGEUR

Quelqu'un a cueilli des fruits dans un verger auquel on accède par 7 portes successives.

Lorsqu'il a voulu en sortir, il lui a fallu donner au premier gardien la moitié de tous les fruits et un en plus. Au second gardien, la moitié des fruits restants et un en plus. Il a dû en donner aux cinq autres gardiens de la même manière.

Il ne lui resta plus alors qu'un seul fruit.

On demande combien de fruits du verger cette personne a cueillis.

À partir de *Fibonacci : extraits du Liber Abaci*, présenté par Marc Moyon, 2016, pp. 33-36.

1. Travail individuel : détaille les différentes étapes de l'énoncé sur ta feuille de brouillon.
2. Travail en groupe
   (a) Déterminez le nombre de fruits cherché par une méthode validée par le groupe.
   (b) Sur la feuille réponse, rédigez votre solution au « problème des fruits et du

Plusieurs tentatives

Classe de 3e, Collège M. Genevoix, Couzeix (87)

x ÷ 2 + 1 : 1er gardien
(x ÷ 2+1) ÷ 2 ~~+~~1 : 2e gardien
[(x ÷ 2 + 1) ÷ 2] ÷ 2 + 1 : 3e gardien
[(x ÷ 2+1 ÷ 2 ÷ 2 + 1] ÷ 2+1 : 4e gardien
[(x ÷ 2+1 ÷ 2 ÷ 2+1 ÷ 2 + 1 ÷ 2 + 1 : 5e gardien
[(x ÷ 2+1 ÷ 2 ÷ 2 + 1 ÷ 2+1 ÷ 2+1 ÷ 2 + 1] : 6e gardien
[x ÷ 2[+1 ÷ 2 ÷ 2 + 1 ÷ 2+1 ÷ 2+1 ÷ 2 + 1 ÷ 2+1] : 7e g

$\left(\frac{x}{2}-1\right):2+1$

$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2-1}{2-1}}{2-1}}{2-1}}{2-1}}{2-1} = 1$

((((((((1+1)×2)+1)×2)+1)×2 +1)×2 +1)×2 +1)×2+1)×2 = 382

Je repars à l'envers. $\boxed{382}$
+1 ×2
÷ → ×

Problème des fruits et du voyageur (4)

Fruit au début ? → la moitié des fruits et un en + → la moitié des fruits restants et un en + → la même chose 5 fois de suite → 1

$4 - 3 = 1$

Donc 7 fois la moitié des fruits

7e gardiens : 3 — $(4+1) \times 2 = 10$
6e gardiens : 10 — $(10+1) \times 2 = 22$
5e gardiens : 22 — $(22+1) \times 2 = 46$
4e gardiens : 46 — $(46+1) \times 2 = 94$
3 " = 94 — $(94+1) \times 2 = 190$
2 " = 190 — $(190+1) \times 2 = 382$
1 " = 382

Au depart, il avait 382 fruits

On choisit un nombre x
– on y ajoute 1
– on multiplie le resultat par 2
On répète ce programme 7 fois.

Ce programme est valable, non seulement pour ce problème, mais aussi pour n'importe quelle situation semblable.
Par exemple, donné le tiers à la place de la moitié.
franchir 5 portes au lieu de 7.
donné 2 fruits au lieu de 1.
reste 2 fruits au lieu de 1.

7e gardien : 2 fruits — $1+1$
6e gardien : 4 fruits — $2 \times 2 + 1$
5e gardien : 8 fruits — $4 \times 2 + 1$
4e gardien : 16 fruits — $8 \times 2 + 1$
3e gardien : 32 fruits — $16 \times 2 + 1$
2e gardien : 64 fruits — $32 \times 2 + 1$
1er gardien : 128 fruits — $64 \times 2 + 1$

Il avait 254 fruits au départ
$254 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = 247$ fruits

---

7 portes = 7 gardiens

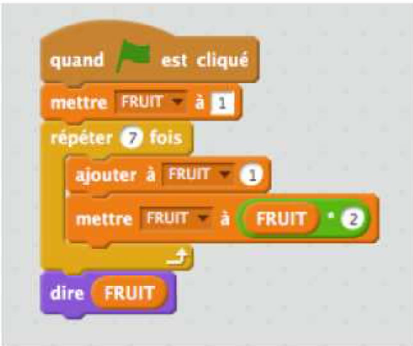
1er gardien = la moitier de tous les fruits + 1 en plus
2ème gardien = la moitier des fruits restant + 1 en plus

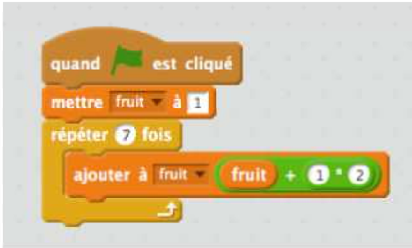
...

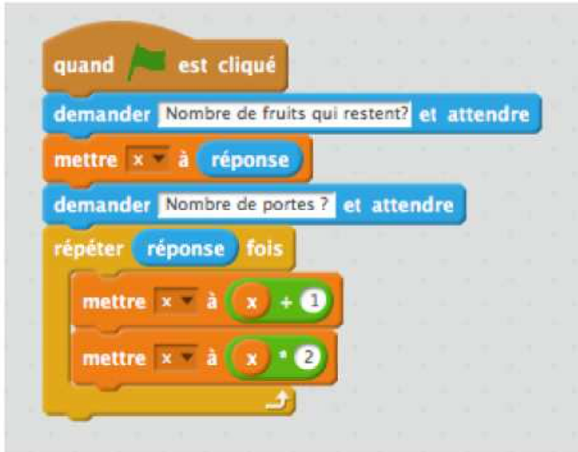
reste 1 pour lui

$4 - 3 = 1$ → il reste un fruit pour lui
→ il en donne 3 au dernier gardien

Problème des fruits et du voyageur (5)





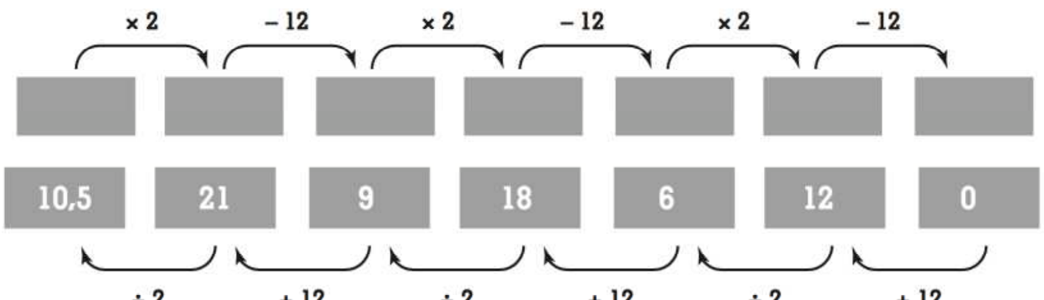


Classe de 3e, Collège M. Genevoix,

Couzeix (87)

Commerce à Lucques, Florence et Pise

Un homme partit commercer à Lucques, il y fit le double et y dépensa 12 deniers.
Puis il quitta cette ville pour se rendre à Florence. Il y fit le double et y dépensa 12 deniers.
Lorsqu'il revint à Pise, il y fit le double et y dépensa 12 deniers.
Et il est proposé que rien ne lui resta.
On demande combien il possédait au départ de son voyage.



Le jour inconnu

Si tu veux savoir en quel jour quelqu'un a embrassé son amie, dis-lui de doubler le jour, d'ajouter 1, de multiplier le tout par 5, puis le résultat par 10, et de soustraire 50 de toute la somme.
Demande ensuite combien de fois on peut certainement soustraire 100 de toute la somme.

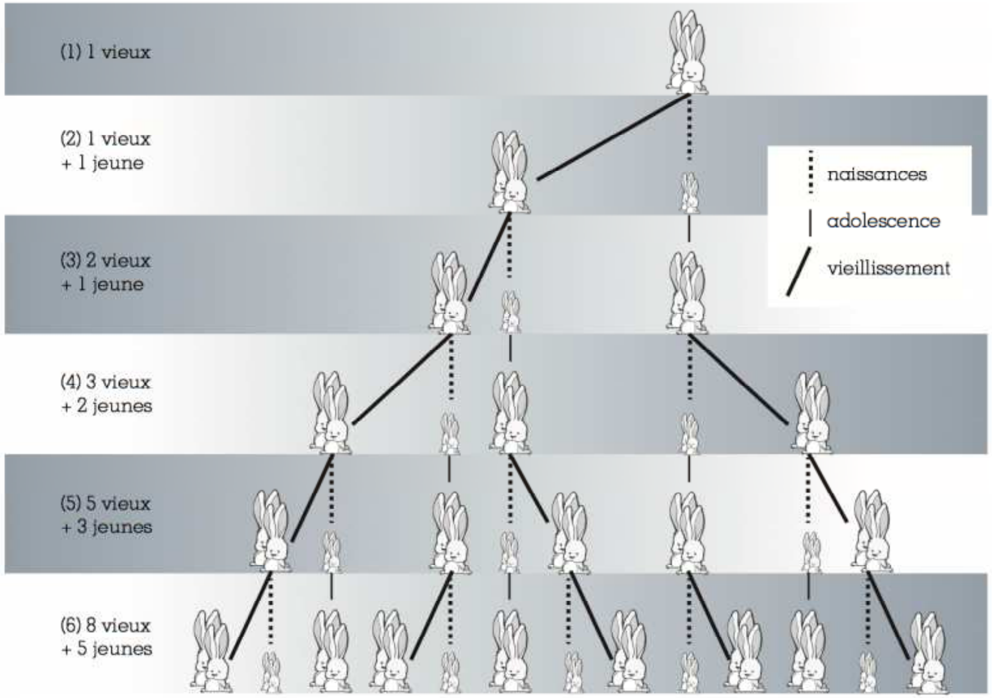
Si c'est une fois, ce sera dimanche, si deux, lundi, si trois, mardi et ainsi de suite.

$$
\begin{aligned}
j &\to j \times 2 \\
&\to j \times 2 + 1 \\
&\to (j \times 2 + 1) \times 5 \\
&\to ((j \times 2 + 1) \times 5) \times 10 \\
&\to ((j \times 2 + 1) \times 5) \times 10 - 50
\end{aligned}
$$

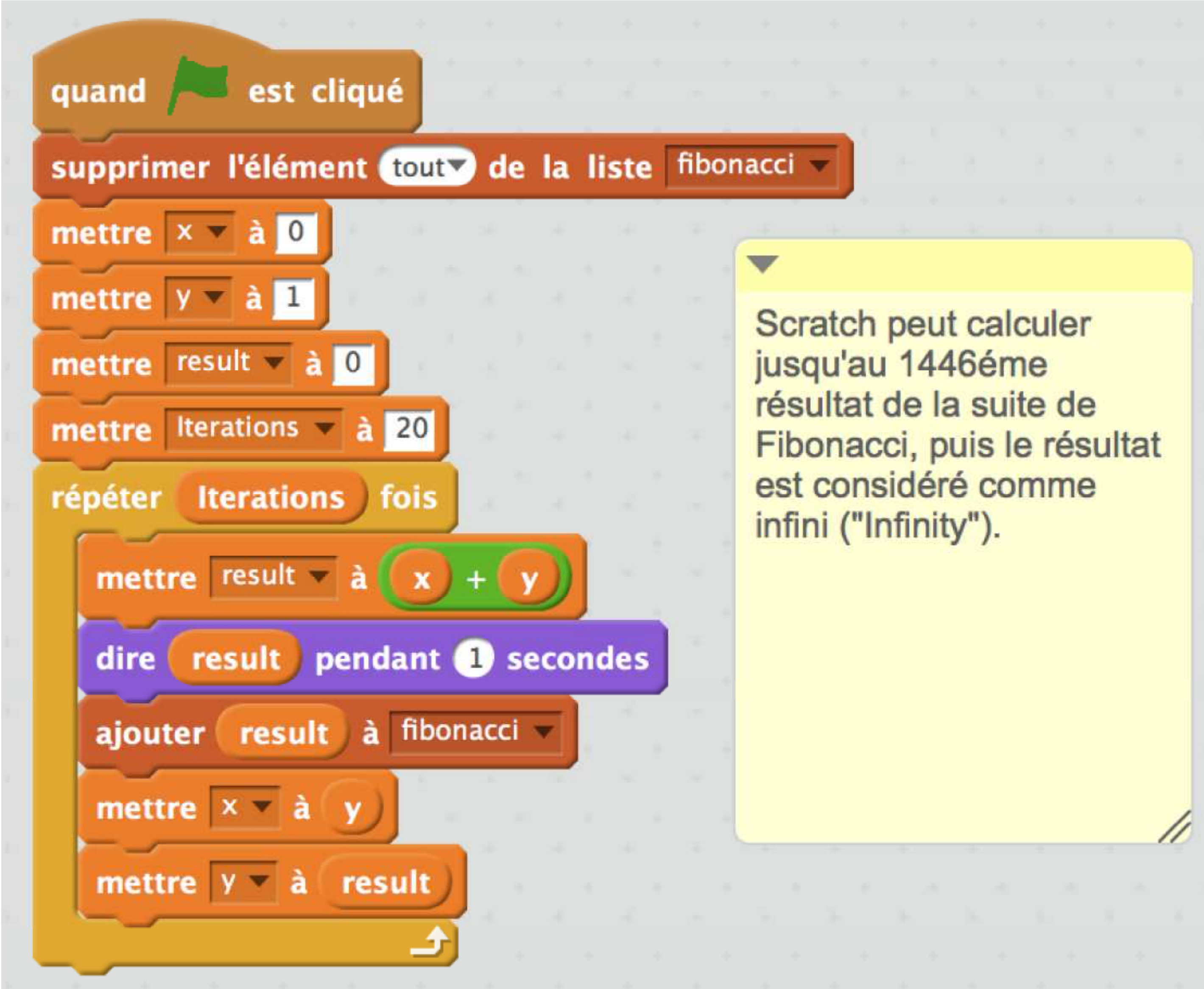
Problème des lapins

Quelqu'un plaça une paire de lapins dans un endroit clos de tous côtés afin de savoir combien de descendants cette seule paire engendrerait en une année.

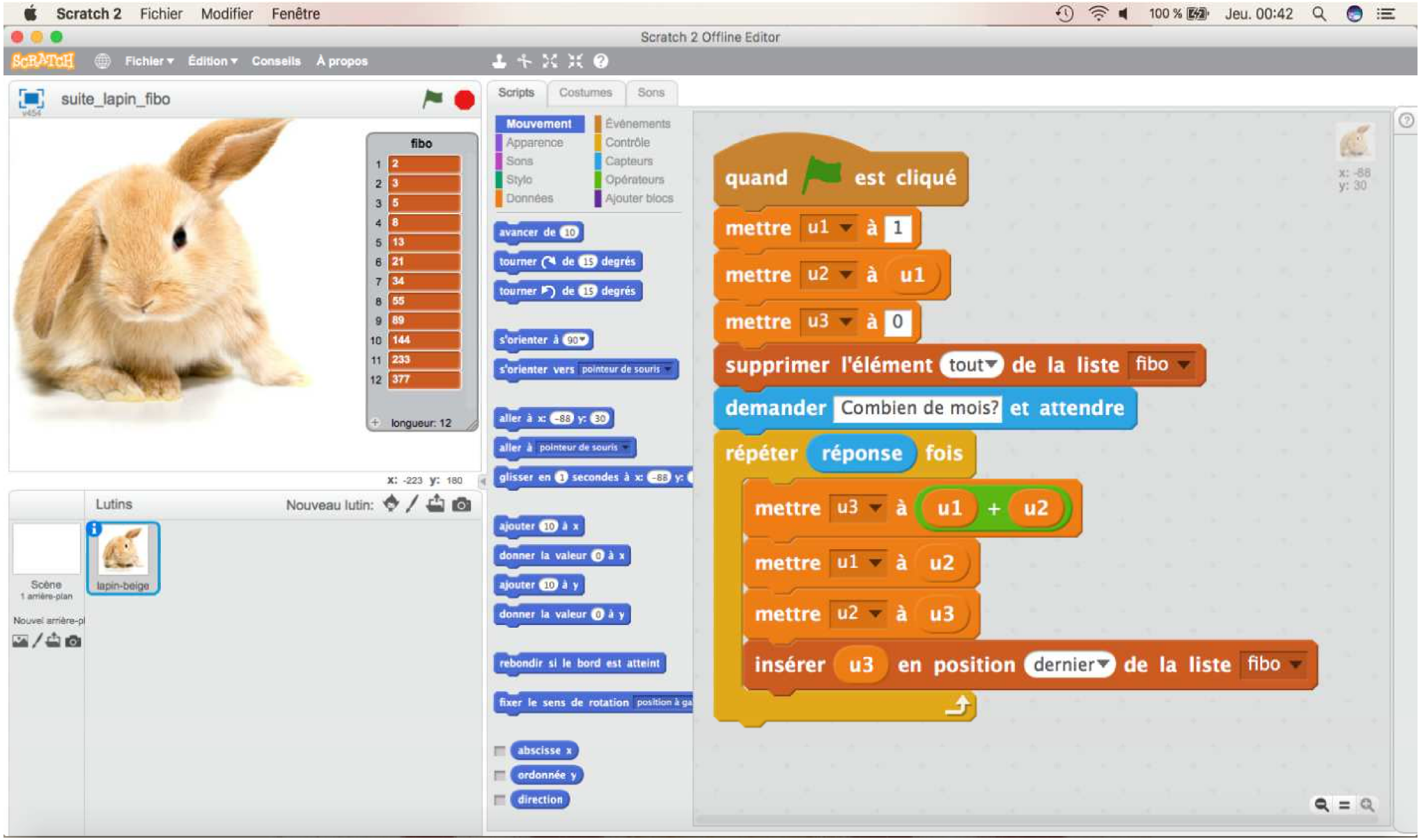
Or, il est dans leur nature de mettre au monde une nouvelle paire chaque mois, et les lapins ont des descendants deux mois après leur naissance.



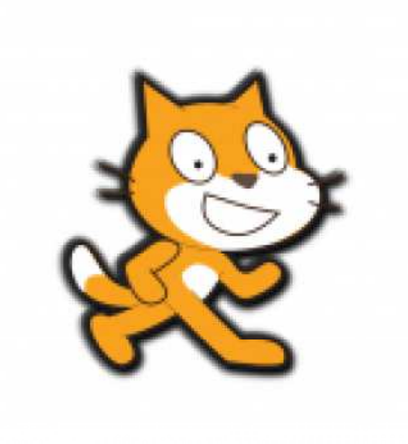
Algorithme qui détermine la suite des nombres de Fibonacci.



Par jfcauche


Scratch 2 Fichier Modifier Fenêtre
Scratch 2 Offline Editor
suite_lapin_fibo
fibo
1 2
2 3
3 5
4 8
5 13
6 21
7 34
8 55
9 89
10 144
11 233
12 377
longueur: 12
Lutins
Nouveau lutin:
Scène
lapin-beige
Scripts
Costumes
Sons
quand [drapeau] est cliqué
mettre u1 à 1
mettre u2 à u1
mettre u3 à 0
supprimer l'élément tout de la liste fibo
demander Combien de mois? et attendre
répéter réponse fois
mettre u3 à u1 + u2
mettre u1 à u2
mettre u2 à u3
insérer u3 en position dernier de la liste fibo

Merci




marc.moyon@unilim.fr