La durée du jour solaire

L'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du Soleil au méridien supérieur d'un même lieu est appelé *jour solaire vrai*. Sa durée n'est pas constante ! Pourquoi ?

L'objet de ce travail est de comprendre cette variation et de donner des valeurs approchées de la durée du jour solaire pour chaque début de saison en utilisant un modèle mathématique simplifié. On comparera les résultats obtenus à la durée du *jour solaire moyen* que l'on définira.

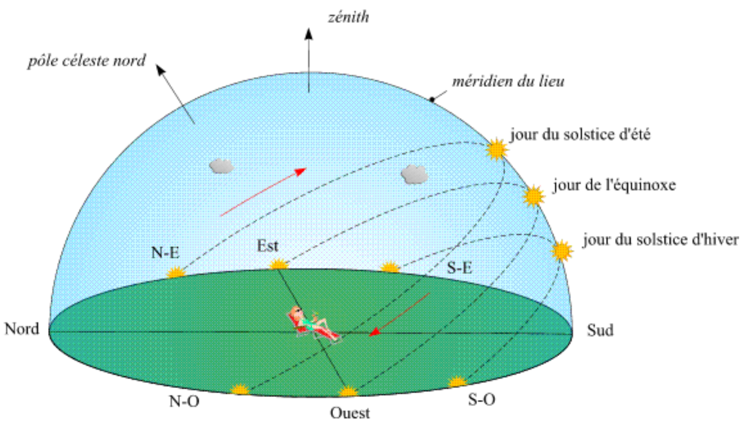
Pour mesurer une durée, on utilise depuis 1967 un étalon de temps indépendant de toute considération astronomique. C'est la seconde du système international d'unités. Elle est fournie par « une »[1] horloge atomique supposée parfaite.

Ainsi le mot *jour* sans adjectif qualificatif désigne une unité de temps. C'est un multiple de la seconde (1 jour = 24 heures = 86400 secondes).

1. Introduction : les hypothèses du modèle du jour solaire « vrai »

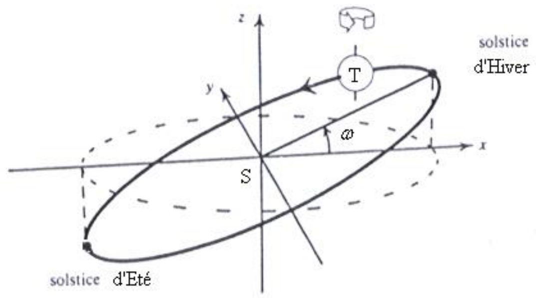
1. Le début des saisons : solstices et équinoxes

Pour un observateur situé à la surface de la Terre, le passage au méridien supérieur se déroule au moment où le soleil atteint le point culminant de sa trajectoire apparente dans le ciel. Ce point de culmination varie au cours de l'*année*[2].
Sa position la plus haute dans le ciel correspond au solstice d'été et sa position la plus basse au solstice d'hiver. Par contre les équinoxes sont associés à la position intermédiaire du point de culmination. Celle-ci est atteinte par le Soleil soit en phase ascendante (équinoxe de Printemps) soit en phase descendante (équinoxe d'automne). Le moment où le Soleil passe au méridien supérieur est appelé midi vrai.

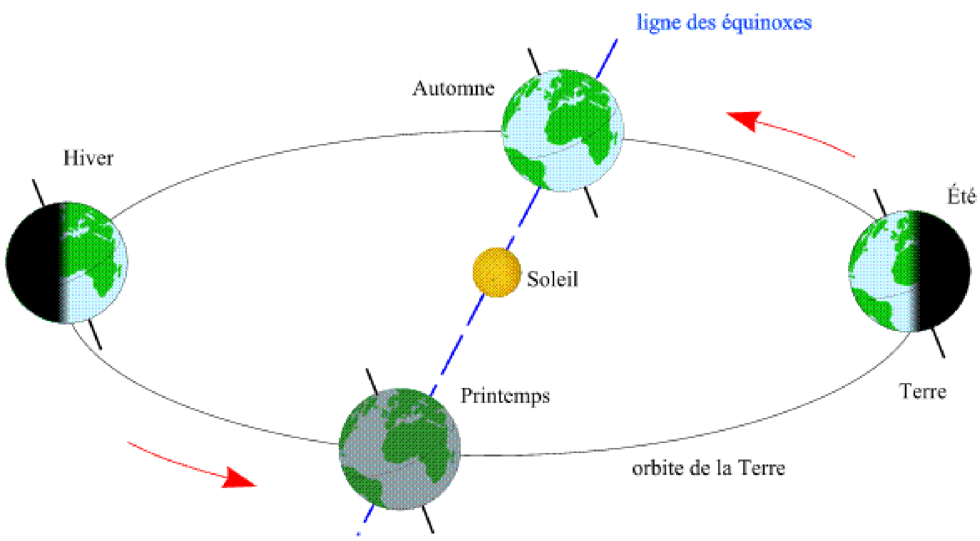


[1] C'est en réalité à partir d'environ 200 horloges atomiques réparties dans le monde entier qu'est défini par les physiciens le Temps Atomique International
[2] Il sera aussi nécessaire de la définir plus précisément (année ou révolution : sidérale, tropique, anomalistique, draconitique et julienne)

On remarque que dans l'espace, pour un observateur regardant l'orbite quasi circulaire de la Terre, le *solstice* est l'instant où le Soleil est le plus éloigné du plan de l'équateur terrestre (plan passant par le centre de la Terre et perpendiculaire à son axe de rotation) tandis que l'*équinoxe* est, au contraire, l'instant où le Soleil est dans ce même plan.



Les solstices et les équinoxes marquent ainsi pour les astronomes le début des saisons.



Saisons dans l'hémisphère nord

On nomme *écliptique* le plan passant par le centre S du Soleil et contenant l'orbite terrestre.
On appelle *équateur céleste* le plan passant par S et orthogonal à la direction fixe de l'axe de rotation de la Terre.
L'intersection de ces deux plans est la droite nommée *ligne des équinoxes*.
On montre que la droite de l'écliptique perpendiculaire en S à la ligne des équinoxes est la *droite des solstices*.[3]
Le système ainsi formé par ces deux droites constitue le « *repère des saisons* » : en effet, quelque soit la forme de l'orbite terrestre, son intersection avec ce repère nous donne les positions de la Terre au début de chaque saison astronomique.

2. Le mouvement de la Terre

Le mouvement de la Terre dans l'espace est complexe : il résulte principalement de la composition d'une rotation et d'une révolution.

[3] Prévoir une annexe !

La période de rotation de la Terre sur elle-même mesurée par rapport aux étoiles[4] notée J_s se nomme *jour sidéral*[5] et vaut 23 heures 56 minutes et 4 secondes. C'est une constante parce que l'on suppose l'uniformité de la rotation terrestre. On fait également l'hypothèse supplémentaire que l'axe de rotation est fixe : fixe par rapport aux étoiles (aucune précession) mais aussi fixe par rapport à la Terre elle-même, modélisée par une sphère rigide (aucune polhodie[6]).

D'autre part la Terre tourne aussi autour du Soleil dans un plan appelé plan de l'écliptique (plan de l'orbite terrestre passant par le centre du Soleil).
La période de révolution de la Terre autour du Soleil repérée aussi par rapport aux étoiles notée T_s se nomme *année sidérale* et vaut 365 jours 6 heures 9 minutes et 10 secondes. On peut la considérer comme constante.

N.B. : la précision sur les périodes est volontairement limitée à la seconde pour rester en accord avec les hypothèses simplificatrices que l'on fait.

3. Les paramètres de l'étude

Pour comprendre la variation du jour solaire, il nous faut introduire deux paramètres principaux : l'obliquité et l'excentricité.

On appelle *obliquité* l'angle ω que fait le plan de l'équateur avec le plan de l'écliptique. Sa valeur est de 23°26'. Elle est supposée constante au cours du temps (aucune nutation). C'est aussi parce que l'obliquité est non nulle qu'il existe des saisons.

De plus l'orbite de la Terre n'est circulaire qu'en première approximation. La première loi de Kepler énonce que sa trajectoire est en fait une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers. Cependant l'*excentricité*[7] de l'orbite terrestre (paramètre noté e indiquant un aplatissement de l'ellipse par rapport au cercle) est très faible, environ 0,0167. Sa valeur est supposée constante par rapport au temps tout comme les autres paramètres caractérisant l'orbite elliptique dans l'espace (on néglige l'influence de la Lune et des autres planètes du système solaire[8]). L'excentricité non nulle de l'orbite entraine également des durées inégales des saisons.

Pour estimer la durée du jour solaire au début des différentes saisons, il est nécessaire d'introduire dans le cas d'une orbite elliptique un paramètre supplémentaire : *l'anomalie vraie* de la Terre à l'équinoxe de Printemps (angle de 77°04' noté γ).

On considère en particulier la *longitude écliptique du périhélie* comme une constante[9]. Cet angle de 102°56' détermine le début des saisons. Il est noté ϖ et constitue le paramètre secondaire de notre étude de la durée du jour solaire.

---

[4] Les étoiles matérialisent un repère fixe de l'espace lorsque l'on néglige le mouvement propre des étoiles.
[5] En toute rigueur, il s'agit du jour stellaire. Le jour sidéral est relatif au point vernal et si l'on tient compte de la précession des équinoxes, ils différent de 8 ms.
[6] Polodie ou polhodie : déplacement ou trajectoire du pôle Nord (ou Sud) à la surface du globe terrestre.
[7] Sa définition précise est donnée au 4.1
[8] Voir en mécanique céleste le mouvement képlérien et le problème des 2 corps
[9] On suppose donc qu'il n'y a pas d'avance du périhélie

2. Première approche : modèle du jour solaire moyen

On étudie tout d'abord le modèle le plus simple. Il consiste à considérer la Terre comme animée d'un mouvement circulaire uniforme autour du Soleil ($e = 0$) et en rotation uniforme par rapport à son axe supposé normal à l'écliptique ($\omega = 0$). Le plan de l'écliptique est donc confondu avec le plan de l'équateur.

Bien qu'à proprement parler les saisons climatiques n'ont pas de sens dans ce cas, on partage néanmoins l'orbite terrestre en quatre parties à l'aide du repère des saisons.

On cherche alors à déterminer la durée d'un jour solaire à partir de ce premier modèle.

1. Choix d'un repère fixe dans l'espace et de l'origine du temps

Origine du repère : le centre du Soleil noté S

Axe des x : droite du plan de l'équateur passant par S et par le point de l'orbite noté H correspondant au solstice d'hiver et orientée positivement vers ce point (ligne des solstices)

Axe des y : droite perpendiculaire à l'axe des x et orientée positivement vers le point P correspondant à l'équinoxe de Printemps (lignes des équinoxes)

Unité de longueur : rayon de l'orbite terrestre (1 ua : unité astronomique)

Unité de temps : 1 année sidérale

Origine du temps : $t = 0$ au solstice d'hiver

Unité d'angle : le radian

On étudie le mouvement de la Terre dans le plan xSy. Faire un schéma où l'on placera les points H, P, E et A correspondant respectivement aux débuts des saisons d'hiver, de printemps, d'été et d'automne.

2. Durée du jour solaire

Soit $s(t) = \text{mes}(x\text{ST})$ la mesure de l'angle que fait la Terre (de centre T) avec l'axe des x à l'instant t.

Exprimer $s(t)$ en fonction de t

Soit Y le nombre de tours effectués par la Terre sur elle-même par rapport aux étoiles (c'est-à-dire par rapport au repère Sxy) pendant une année sidérale.

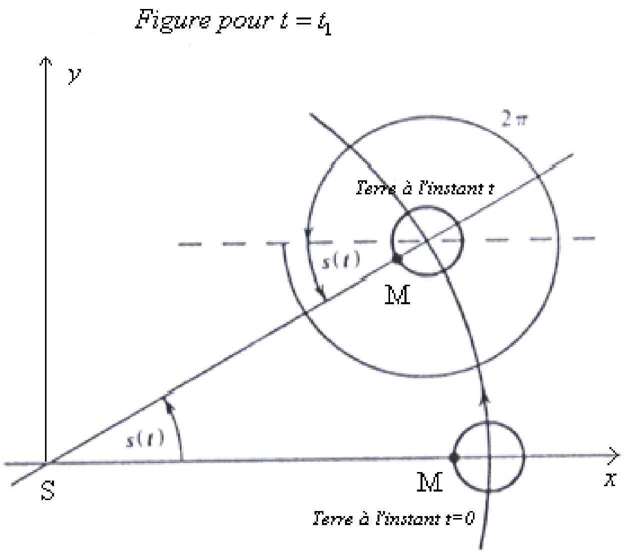
Exprimer en secondes les périodes de rotation et de révolution de la Terre.

En déduire la valeur de Y et évaluer son incertitude absolue ΔY.

Soit $a(t)$ la mesure de l'angle dont a tourné la Terre autour de son axe entre les instants 0 et t.

Exprimer $a(t)$ en fonction de Y et de t dans l'hypothèse de l'uniformité de la rotation.

On cherche maintenant à préciser une relation entre ces deux angles. Pour cela, considérer la figure ci-dessous :



Soit M un point de la surface terrestre pour lequel le Soleil culmine lorsque $t = 0$. Il passe donc au méridien du lieu d'observation.

Soit t_1 l'instant où le Soleil passe de nouveau et pour la première fois au méridien du lieu M.

De même soit t_k l'instant où survient le k-ième passage au méridien du lieu M.

Montrer que t_k vérifie la relation angulaire $\boxed{a(t_k) = s(t_k) + k2\pi}$ pour tout entier k.

A partir de la relation entre $a(t)$ et $s(t)$ en déduire l'expression de t_k en fonction de k et de Y

On rappelle que l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du Soleil au méridien supérieur d'un même lieu est nommé jour solaire.

Soit J la durée du jour solaire. On a donc $\boxed{J = t_{k+1} - t_k}$

Déterminer l'expression de J et montrer qu'elle est indépendante de k.

3. Conclusion : définition du jour solaire moyen

Quelle est l'unité de J ? Faire l'application numérique !

Sous quelle hypothèse peut-on considérer J comme une constante ?

Par définition, la durée du jour solaire moyen notée J_0 est égale à la quantité $\boxed{\dfrac{1}{Y-1}}$

On remarquera qu'ici l'adjectif « moyen » est utilisé pour qualifier ce modèle initial. Il est caractérisé par l'orbite circulaire et l'uniformité des mouvements de la Terre associées à une obliquité nulle.

Convertir J_0 en seconde et le comparer à la durée d'un jour. Quelle en est la précision ? (calcul d'erreur ΔJ_0)

La seconde de temps moyen était définie comme la durée de 1/86400 jour solaire moyen. Ainsi la valeur nominale J_m du jour solaire moyen a été définie comme égale à un jour soit 86400 secondes de temps atomique.

Par la suite, on comparera les durées du jour solaire obtenues à la durée du jour solaire moyen en calculant l'écart $J - J_0$ pour chacune des contributions prises en compte.

3. ***Contribution de l'obliquité à la variation du jour solaire***

On suppose ici que l'orbite de la Terre est encore assimilée à un cercle ($e = 0$) mais l'on tient compte du fait que l'obliquité n'est plus nulle. Dans ce cas, le plan de l'écliptique n'est plus confondu avec le plan de l'équateur.
Dans ce second modèle, on conserve encore l'hypothèse de l'uniformité du mouvement (de rotation et de révolution) et l'on n'étudie que l'influence du seul paramètre ω .

On rappelle que l'équateur céleste est le plan passant par S et parallèle à chaque instant au plan de l'équateur terrestre.

1. Etude au voisinage d'un solstice

Pour cette étude, on utilise un nouveau repère d'origine le centre S du Soleil :

Axe des *x* modifié : droite de l'équateur céleste passant par S et par H' projection orthogonale sur ce plan du point H de l'orbite correspondant au solstice d'hiver. Elle est orientée positivement de S vers H'.

Axe des *y* : droite perpendiculaire à l'axe des *x* et orientée positivement vers la position de la Terre à l'équinoxe de Printemps[10]

Axe des *z* : droite parallèle à l'axe de rotation de la Terre et orientée positivement vers le pôle Nord terrestre ainsi le mouvement se déroule dans le sens trigonométrique direct.

Origine du temps inchangée : $t = 0$ au solstice d'hiver

Les unités de temps, d'angle et de longueur sont inchangées (année sidérale, rad et ua)

Placer sur un schéma les points H, P, E et A correspondant aux débuts des saisons

On note E' la projection de E sur le plan de l'équateur céleste. Faire un schéma dans ce plan.

[10] Direction du point vernal ?

On étudie maintenant le mouvement de la projection orthogonale du centre de la Terre dans le plan xSy

Quelles sont les coordonnées du centre T de la Terre en fonction de t dans le plan de l'écliptique ?

Quelles sont les coordonnées de T' projection de T sur le plan de l'équateur céleste en fonction de t et de ω ?

De manière similaire à la première approche, on nomme $s(t)$ la mesure de l'angle que fait la projection de la Terre sur le plan xSy avec l'axe des x à l'instant t.

On a donc $s(t) = \text{mes}(xST')$ et en déduire que $\boxed{\tan s(t) = \dfrac{\tan(2\pi t)}{\cos\omega}}$

L'utilisation du radian permet de donner une approximation de $s(t)$ au voisinage de $t = 0$.
Quelle est-elle ?

Que peut-on dire de l'expression de $a(t)$?

Vérifier que la relation valable dans le plan de l'équateur céleste entre $a(t_k)$ et $s(t_k)$ n'est pas modifiée.

Soit M un point de la surface terrestre pour lequel il est midi lorsque $t = 0$

Soit M' sa projection dans le plan de l'équateur céleste

Soit t_k l'instant où survient le k-ième midi au lieu M

J désigne toujours la durée du jour solaire. On a encore $J = t_{k+1} - t_k$

Montrer alors que : $\boxed{J \simeq \dfrac{1}{Y - \dfrac{1}{\cos\omega}}}$ en justifiant l'approximation des petits angles lorsque t reste au voisinage de 0.

Montrer qu'au voisinage du solstice d'hiver la durée du jour solaire est supérieure à 24 heures

Déterminer l'écart $J - J_0$ en seconde de temps

Montrer qu'en raison de la symétrie du problème l'écart entre le jour solaire et jour solaire moyen reste le même pour le solstice d'été (indications à donner sur le changement de repère)

Pour cette contribution, l'expression approchée de J au voisinage d'un solstice est donc fonction de Y et ω. On la note $J_1(\omega)$

Vérifier que pour $\omega = 0$, on retrouve l'égalité $J_0 = J_1(0)$

2. Etude au voisinage d'un équinoxe

On effectue un changement de repère par quart de tour positif autour de l'axe des z inchangé. L'origine S du repère est donc identique.

Axe des x : ligne des équinoxes orientée positivement vers le point orbital de la Terre au début du Printemps[11]

Axe des y : droite perpendiculaire à l'axe des x et orientée positivement vers E' la projection du point E associé au solstice d'été

Origine modifiée du temps : $t = 0$ à l'équinoxe de printemps

Aucun changement dans les unités utilisées

Comme précédemment on étudie le mouvement de la projection de la Terre dans le plan xSy

Quelles sont les coordonnées de la projection de T (centre de la Terre) en fonction de t et de ω ?

Montrer qu'alors $\boxed{\tan s(t) = \cos\omega \tan(2\pi t)}$ Quelle approximation peut-on faire ?

Que peut-on dire de la relation liant $a(t)$ et $s(t)$?

En déduire que la durée du jour solaire au voisinage de l'équinoxe de Printemps est $\boxed{J \simeq \dfrac{1}{Y - \cos\omega}}$

Pour cette contribution, l'expression approchée à l'équinoxe de J est également fonction de Y et ω. On la note $J_2(\omega)$.

Montrer qu'au voisinage de l'équinoxe de printemps la durée du jour solaire est inférieure à 24 h. Déterminer l'écart $J_2 - J_0$ en seconde de temps

Montrer enfin que l'écart entre le jour solaire et jour solaire moyen reste le même pour l'équinoxe d'automne en utilisant un argument de symétrie.

Que se passe-t-il à titre de vérification lorsque $\omega = 0$?

3. Conclusion ?

4. *Préliminaires à l'étude de la contribution de l'excentricité*

1. Description mathématique d'une ellipse

Pour décrire une ellipse, on utilise souvent un repère orthonormé d'origine Ω et d'axes (à reformuler !)

[11] Point vernal à définir ?

a et b désignent les longueurs des demi-axes ($a \geq b > 0$)

Soit $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ l'abscisse du foyer qui est occupé par le centre du Soleil S. C'est aussi la demi-distance focale.

L'excentricité e d'une ellipse est par définition la distance du centre Ω de l'ellipse à l'un de ses foyers rapporté au demi-grand axe soit $\boxed{e = \frac{c}{a}}$

Attention à ne pas la confondre avec ε le coefficient d'aplatissement de l'ellipse par rapport au cercle[12] de rayon a. Par définition ε est égal à $\frac{b}{a}$

Vérifier que $\varepsilon = \sqrt{1 - e^2}$

D'autre part, on désigne par p le paramètre de la conique. C'est la longueur de la demi-corde passant par un foyer et perpendiculaire à l'axe focal.

Montrer que : $p = \frac{b^2}{a}$

L'aire d'une ellipse est donnée par la formule[13] : $\mathcal{A} = \pi ab$

2. L'orbite elliptique de la Terre

Unité de longueur : 1 unité astronomique[14] (soit 149 597 870,691 km)

Soient r et R respectivement les rayons-vecteurs au périhélie et à l'aphélie[15]

Montrer que la moyenne arithmétique de r et R est égale à a

Montrer que b est égal à la moyenne géométrique de r et R

Montrer que la moyenne harmonique de r et R est égale à p

Donner les expressions de e et de $\mathcal{A}$ en fonction de r et R

On donne les valeurs numériques approchées suivantes[16] :

$$r \simeq 147{,}1 \times 10^6 \text{ km et } R \simeq 152{,}1 \times 10^6 \text{ km}$$

Calculer e et vérifier que pour la Terre, on a bien $e \simeq \frac{1}{60}$ et donner un ordre de grandeur de $\mathcal{A}$ en km².

[12] Ce cercle est nommé cercle principal ou encore en astronomie cercle apsidal.
[13] On peut vérifier que si $a = b$ alors on retrouve ainsi l'aire d'un cercle !
[14] Sa définition précise résulte de l'application de la troisième loi de Kepler et de la loi de la gravitation universelle de Newton
[15] Périhélie : point orbital le plus proche du Soleil /Aphélie : point orbital le plus éloigné du Soleil
[16] On remarquera que $r < 1$ ua $< R$

Convertir r et R en ua (de même pour a et b) et exprimer $\mathcal{A}$ en ua²

Enfin, calculer les moyennes harmonique et quadratique de r et R

Classer les moyennes et l'ua dans l'ordre croissant

Supposons que l'on veuille représenter l'orbite terrestre par un dessin mural à l'échelle de 1m pour 1ua

Quelle est alors la longueur du petit axe sur le schéma ? Estimer la différence b - a en mm

Quelle est la position du Soleil par rapport au centre de l'ellipse ?

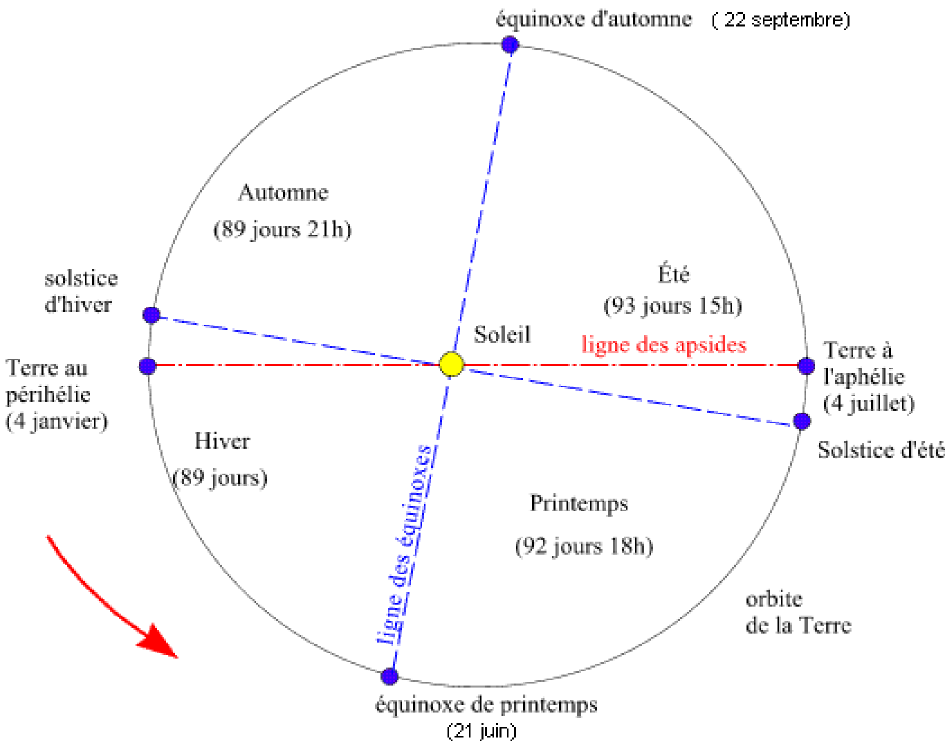
Que peut-on conclure ? L'orbite terrestre est en première approximation un cercle excentré cependant l'estimation de la durée du jour solaire nécessite de tenir compte de la faible ellipticité de la trajectoire de la Terre.

3. Détermination des saisons

La définition de la ligne des équinoxes de même que celle des solstices est indépendante de la forme de l'orbite terrestre mais est liée à la direction fixe dans l'espace de l'axe de rotation de la Terre.

Il nous faut maintenant positionner plus précisément le repère des saisons par rapport au repère utilisé pour décrire le mouvement de la Terre dans l'écliptique.

Le solstice d'hiver est lié à l'inclinaison de l'axe de la Terre tandis que le périhélie est dû à l'ellipticité de l'orbite. Ces deux phénomènes possèdent des causes distinctes mais sont actuellement proches dans le temps et dans l'espace : une douzaine de jours les séparent soit environ un angle de 12° entre la ligne des solstices et la ligne des apsides !



Durée des saisons pour l'année 2010

Le point de passage au solstice d’hiver peut être dans un premier temps confondu avec le périhélie pour simplifier notre étude.

On constate alors :

- des durées inégales pour les saisons
- une dissymétrie par rapport à S des points de passage aux solstices
- une symétrie des points de passage aux équinoxes par rapport à S cependant si les vitesses angulaires sont égales, les aires balayées sous un même angle ne sont pas égales ! (donc μ dépend du type d’équinoxe)

Dans quelle mesure l’approximation qui confond le périhélie et le point du solstice d’hiver affecte-t-elle la précision ?

Point vernal et direction vernale (deux points de vue : observationnel ou théorique)

Longitude écliptique du périhélie ϖ

Anomalie vraie de la Terre à l’équinoxe de Printemps γ

5. *Contribution de l’excentricité à la variation du jour solaire*

Dans cette partie, on suppose que l’axe de rotation de la Terre est perpendiculaire au plan de l’orbite terrestre et que celle-ci n’est plus circulaire mais elliptique ($\omega = 0$ et $e \neq 0$).

Les saisons climatiques n'ont également pas de sens dans ce cas mais l'on partage toujours l'orbite terrestre à l'aide du repère des saisons.

Dans sa révolution autour du Soleil qui occupe l'un des foyers de l'ellipse, la vitesse angulaire de la Terre n'est plus constante ainsi l'expression de l'angle $s(t)$ doit être modifiée.

En effet, la deuxième loi de Kepler stipule que : le rayon-vecteur balaye des aires égales durant des temps égaux (vitesse aréolaire[17] constante)
On peut alors démontrer que la vitesse angulaire de la Terre décroît lorsqu'elle s'éloigne du Soleil et augmente dans le cas contraire[18].

Ainsi dans ce troisième modèle, l'hypothèse d'uniformité ne concerne plus que la seule rotation terrestre. L'expression de $a(t)$ reste donc inchangée.

1. Etude au voisinage du périhélie

Origine du repère : le centre S du Soleil

Axe des x : ligne des apsides[19] c.-à-d. la droite de l'écliptique passant par S et par le périhélie et l'aphélie (grand axe de l'ellipse orienté positivement vers le périhélie)

Axe des y : droite perpendiculaire à la ligne des apsides passant par S (droite parallèle au petit axe de l'ellipse de centre Ω) orientée de telle façon que le repère soit direct

Notez que dans ce modèle les plans de l'écliptique et de l'équateur terrestre sont confondus.

Unité de longueur : 1 unité astronomique

Unité de temps : 1 année sidérale

Origine du temps : $t = 0$ au passage au périhélie

Unité d'angle : le radian

On étudie le mouvement de la Terre dans le plan xSy. Faire un schéma !

Soit $s(t) = \text{mes}(xST)$ l'angle[20] en radian vu depuis le Soleil entre l'axe des x et la Terre

En raison de l'orbite elliptique, l'angle $s(t)$ est différent de l'expression obtenue dans le cas circulaire.

---

[17] Définition : aire balayée par le rayon-vecteur par unité de temps
[18] Rédaction d'une annexe sur les 3 lois de Kepler !
[19] Ce terme désigne les points extrêmes de l'orbite de la Terre pour lesquels la distance au Soleil est minimale (apside inférieure ou périhélie) ou maximale (apside supérieure ou aphélie)
[20] Cet angle, dans ce cas, est nommé anomalie vraie de la Terre par les astronomes

Afin de déterminer l'expression littérale de $s(t)$ au voisinage du périhélie, évaluer tout d'abord la vitesse aréolaire et en déduire l'aire du secteur elliptique balayé par le rayon-vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ST}}$ en fonction de *r*, *R* et du temps *t*.

D'autre part, lorsque *t* est voisin de 0, on peut assimiler l'arc d'ellipse avec un arc de cercle de rayon *r* et de centre S. Faire un schéma !

Quelle est l'aire du secteur angulaire de rayon *r* et d'angle $s(t)$?

En déduire $s(t)$ en écrivant l'égalité des ces deux aires (secteur angulaire et surface elliptique balayée pendant un temps *t*)

Montrer que : $\boxed{s(t) \simeq \pi(1+\frac{R}{r})\sqrt{\frac{R}{r}} \times t}$ et établir que : $s(t) > 2\pi t$

On cherche à écrire $s(t)$ sous la forme d'un produit d'une vitesse angulaire et du temps en introduisant une constante multiplicative λ_{H} :

$$s(t) = 2\pi\lambda_{\mathrm{H}} t \quad \text{où} \quad \lambda_{\mathrm{H}} = \frac{1}{2}(1+\frac{R}{r})\sqrt{\frac{R}{r}}$$

L'inégalité $\lambda_{\mathrm{H}} > 1$ traduit le fait qu'au voisinage du périhélie la vitesse angulaire de la Terre est supérieure à 2π radians par année sidérale

La relation entre $a(t_k)$ et $s(t_k)$ est-elle dépendante de la forme de l'orbite ?

En déduire une expression de la durée du jour solaire au périhélie en fonction de *Y* et λ_{H} ?

Montrer que cette durée est supérieure à celle du jour solaire moyen

Exprimer λ_{H} en fonction de l'excentricité *e* puis en déduire un développement limité au premier ordre ($e \ll 1$)

Rappel[21] : $\sqrt{1 \pm e} \simeq 1 \pm \frac{1}{2} e$ et $\sqrt{\frac{1 \pm e}{1 \mp e}} \simeq 1 \pm e$

Montrer qu'alors : $\boxed{J \simeq \frac{1}{Y-(1+2e)}}$ et vérifier la compatibilité de cette formule avec le premier modèle.

Calculer l'écart en seconde de temps avec la durée du jour solaire moyen

On note ce jour solaire $J_3(e)$

[21] Cela revient à confondre une courbe avec sa tangente d'où une erreur en e^2

2. Etude au voisinage de l'aphélie

De façon similaire, faire un choix judicieux du repère et de l'origine des temps. Proposer un schéma !

On approximera l'aire balayée par l'aire d'un triangle. Quelle est sa base ? Quelle est sa hauteur lorsque l'angle est petit ? Cela revient à assimiler l'arc d'ellipse à un arc de cercle. Quel est son rayon ?

Posons $\lambda_E = \frac{1}{2}(1+\frac{r}{R})\sqrt{\frac{r}{R}}$ et montrer alors que $\lambda_E < 1$ puis en donner un développement limité au premier ordre en *e*.

En déduire que : $\boxed{J \simeq \frac{1}{Y-(1-2e)}}$ et faire la vérification d'usage. On le note $J_4(e)$.

Calculer l'écart à la durée du jour solaire moyen en seconde de temps.

3. Etude au voisinage du solstice d'hiver

Placer la ligne des équinoxes dans le schéma précédant en confondant le point de passage au solstice d'hiver avec le périhélie

Que peut-on alors dire de la ligne des solstices ?

Par rapport à S, on observe une dissymétrie du problème des solstices. On cherche à évaluer la vitesse angulaire de la Terre (en radians par année sidérale) aux solstices.

Ainsi avant tout calcul, comparer graphiquement $s(t)$ à $2\pi t$ pour chaque apside assimilé à un solstice (cercles iso-cinétiques).

4. Etude au voisinage du solstice d'été

Au voisinage du solstice d'été, la Terre est proche de l'aphélie : on confondra donc dans un premier temps le point correspondant au solstice d'été avec l'aphélie

5. Etude au voisinage d'un équinoxe

Faire le choix du repère adapté et de l'origine du temps en supposant la ligne des équinoxes parallèle au petit axe de l'orbite elliptique

On observe que P et A sont symétriques par rapport au Soleil ainsi les vitesses angulaires sont égales mais les aires balayées sous un même angle ne sont pas égales ! (donc μ dépend du type d'équinoxe)

Faire un schéma pour justifier ces considérations ???

Montrer que : $\boxed{J \simeq \frac{1}{Y-\mu}}$ et exprimer μ comme un D.L. en e. Quel est son ordre ?

Dans quelle mesure l'approximation qui confond le périhélie et le point du solstice d'hiver affecte-t-elle la précision ?

Calcul de $\mu_P(e)$ et $\mu_A(e)$.

Sont-ils des inverses comme le suggère les cas précédents ? Cela est-il du à la rotation du repère de 180° (demi-tour) ?

Notation $J_5(e)$ et $J_6(e)$

6. *Influence du paramètre secondaire*

1. Etude au voisinage du solstice d'hiver
2. Etude au voisinage de l'équinoxe de printemps
3. Etude au voisinage du solstice d'été
4. Etude au voisinage de l'équinoxe d'automne

7. *Contribution des deux effets à la variation du jour solaire : modèle du jour solaire « vrai »*

C'est un modèle basé sur le mouvement képlérien de la Terre dont les différentes hypothèses ont été formulées lors de l'introduction générale de ce travail. En particulier, la révolution elliptique de la Terre autour du Soleil n'est pas perturbée par un autre corps et la rotation de la Terre est supposée uniforme.

1. Expression de la durée du jour solaire

Axe des z : droite parallèle à l'axe de rotation de la Terre et orientée positivement vers le pôle Nord terrestre ainsi le mouvement se déroule dans le sens trigonométrique direct.

Pourquoi l'expression de $a(t)$ est-elle inchangée ?

Dans quel plan la relation entre $a(t)$ et $s(t)$ reste-t-elle identique ?

La recherche de l'expression approchée de $s(t)$ au début de chacune des saisons montre quelle peut toujours se mettre sous la forme du produit d'une vitesse angulaire et du temps : $2\pi \times u \times v \times t$ avec u une fonction de l'obliquité et v une fonction de l'excentricité e et de γ (anomalie vraie de la Terre à l'équinoxe de printemps)

En déduire qu'alors la durée du jour solaire s'écrit de façon générale : $J = \frac{1}{Y - uv}$

Projection d'une ellipse : ellipse ?

2. Tableau synthétique

Présentation finale sous forme de tableau : $J(Y,\omega,e,t)$ et $J-J_0$
Son analyse nous conduit au questionnement suivant :

3. Les contributions sont-elles approximativement additives ?

$\left[J(\omega)-J_0\right]+\left[J(e)-J_0\right]\simeq J(\omega,e)-J_0$?

A-t-on $\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{Y-v}\simeq\frac{1}{Y-uv}+\frac{1}{Y-1}$ lorsque u et v sont proches de l'unité ?

Quelles sont les hypothèses qui subsistent ?

En particulier, que peut-on dire si la rotation de la Terre n'est plus uniforme ?