A propos du calcul du logarithme

M.Gouy G.Huvent A.Ladureau

10 février 2003

1 Une première méthode

1.1 Etude d'une fonction

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \end{aligned}$$

Pour tout réel x différent de -1, on peut écrire $P_n(x)$ sous la forme d'une fraction rationnelle de dénominateur $1+x$ en remarquant qu'il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-x$. On obtient

$$P_n(x) = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

Pour obtenir $\ln(1+x)$ à partir de P_n, il semble naturel de considérer que lorsque $|x|<1$, on a $P_n(x) \simeq \dfrac{1}{1+x}$. En intégrant on obtient, du moins on l'espère, le logarithme.
On pose donc, pour tout réel x de $]-1,+\infty]$ et pour tout entier naturel n non nul

$$\begin{aligned} F_n(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\ G_n(x) &= \ln(1+x) - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right] \\ &= \ln(1+x) - F_n(x) \end{aligned}$$

1.1.1 Etude de la fonction G_n, applications

On a alors

$$\begin{aligned} G_n'(x) &= \frac{1}{1+x} - P_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^n}{1+x} \\ &= \frac{(-x)^n}{1+x} \end{aligned}$$

On peut ainsi en déduire le tableau de variations de la fonction G_n suivant les valeurs de n :

Si n est pair

x	-1	0	$+\infty$
$G'_n(x)$	$+$	0	$+$
$G_n(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Si n est impair

x	-1	0	$+\infty$
$G'_n(x)$	$+$	0	$-$
$G_n(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Des tableaux précédents, on peut ainsi déduire que pour tout entier $k > 0$ et tout réel $x \geq 0$, on a :

$$G_{2k-1}(x) \leq 0 \leq G_{2k}(x)$$

Soit en conséquence,

$$F_{2k}(x) \leq \ln(1+x) \leq F_{2k-1}(x)$$

1.2 Etude de deux suites

On choisit x dans $[0,1]$ et on définit les suites U et V respectivement par

$$U_k = F_{2k}(x) \text{ et } V_k = F_{2k-1}(x) \text{ (k désignant un entier naturel non nul)}$$

Le dernier résultat obtenu du paragraphe 1.1 permet d'écrire que
Pour tout entier non nul k, on a

$$U_k \leq \ln(1+x) \leq V_k$$

C'est à dire que

$$0 \leq \ln(1+x) - U_k \leq V_k - U_k$$

Soit

$$0 \leq \ln(1+x) - U_k \leq \frac{x^{2k}}{2k} \leq \frac{1}{2k}$$

en tenant compte de la définition de U_k et V_k et du fait que x est choisi dans $[0,1]$.

Remarque 1 *Le lecteur savant reconnaît les propriétés des séries alternées : les sommes partielles sont adjacentes et encadrent donc la limite.*

Comme $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{2k}\right) = 0$, on obtient sans difficulté que la convergence de la suite U vers $\ln(1+x)$. On démontre de même (ou à l'aide du lien existant entre U et V) que la suite V converge également vers $\ln(1+x)$.

Remarque 2 *L'égalité* $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ *porte le nom de série de* MERCATOR[1].

1.3 Application au calcul de $\ln(X)$ pour tout réel X de $[1,2]$

Soit X un réel de $[1,2]$,on pose $X = 1+x$ avec $x \in [0,1]$. Les calculs précédents permettent d'affirmer en gardant les mêmes notations que

$$U_k \leq \ln(1+x) \leq V_k$$

et que

$$V_k - U_k = \frac{x^{2k}}{2k}$$

[1] MERCATOR Nicolaus- Cismar 1620-Paris 1687. Mathématicien allemand, il ne faut pas le confondre avec son homonyme à qui l'on doit la projection de MERCATOR.

donc $[U_k, V_k]$ constitue un encadrement de $\ln(1+x)$ d'amplitude $\frac{x^{2k}}{2k}$. Si on désire obtenir un encadrement d'amplitude P (où P désigne un réel strictement positif donné), il suffit de choisir l'entier k de telle sorte que $\frac{x^{2k}}{2k}$soit inférieur à P. On remarque qu'au pire, il suffit de choisir k tel que :

$$\frac{1}{2k} \leq P \text{ soit } k \geq \frac{1}{2P}$$

Par exemple si $P = 10^{-p}$ (i.e. si l'on cherche une approximation à 10^{-p} près du logarithme), on a $k \geq \frac{10^p}{2}$.

Remarque 3 *C'est bien "au pire", car si $x \leq \frac{1}{2}$ par exemple on choisit k tel que $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}}{2k} = \frac{1}{k2^{2k+1}} \leq \frac{1}{2^{2k+1}} \leq P$, soit $k \geq \frac{-\ln 2P}{2\ln 2}$. Pour $P = 10^{-p}$, on trouve $k \geq \frac{p\ln 10 - \ln 2}{2\ln 2}$ (à comparer avec le résultat précédent).*
Ce raisonnement peut être fait de façon générale avec x quelconque sauf une valeur particulière, avez-vous remarqué laquelle ?

Cela permet donc de proposer un premier algorithme de calcul de $\ln X$ pour X dans $[1, 2]$

1.3.1 Algorithme

On se propose d'écrire un programme cherchant un encadrement de $\ln(X)$ d'amplitude inférieure ou égale à P. Le réel P, donné par l'utilisateur est positif . On note $[T, S]$, l'encadrement obtenu.
Algorithme :

Demander X et P Debut de la partie " Travail " Mettre 3 dans N et $X-1$ dans X Mettre X dans S Mettre $X - \frac{X^2}{2}$dans T Tant que $S - T > P$ Mettre $T + \frac{X^N}{N}$ dans S Mettre $S - \frac{X^{N+1}}{N+1}$ dans T Augmenter N de 2 Fin du Tant Que Fin " Travail " Afficher Encadrement $[T, S]$ Afficher N

Ce qui donne les programmes suivants (la partie "travail" est mise sous la forme d'un sous-programme, elle servira pour d'autres algorithmes).

Programme Principal : CALCLN12

CALCLN12		
TI-83	Casio	TI-92

`ClrHome`
`Prompt X,P`
`prgmTRA12`
`Disp T,S,N`
	`ClrText`
	`"X=" ?→X`
	`"P=" ?→P`
	`Prog "TRA12"`
	`{T,S,N}`
		`calcln12(x,p)`
		`Prgm`
		`ClrIo`
		`tra12(x,p)`
		`disp t,s,n`
		`EndPrgm`

Remarque : Pour faciliter le calcul, il est préférable de mettre la TI-92 en mode approché.

Sous-Programme : TRA12

TRA12		
TI-83	Casio	TI-92
3 → N X − 1 → X X → S X − X^2/2 → T While S − T > P T+X^N/N→S S-X^(N+1)/(N + 1) →T N + 2 → N End	3 → N X − 1 → X X → S X − X^2/2→ T While S − T > P T + X^N/N → S S − x^(N + 1)/(N + 1) → T N + 2 → N WhileEnd	tra12(x,p) Prgm 3 → n x − 1 → x x → s x − x^2/2 → t While s − t > p t + x^n/n→ s s − x^(n+1)/(n+1)→ t n + 2 → n EndWhile EndPrgm

On peut alors compléter le tableau suivant : (P étant choisi égal à $0,01$). Seules les décimales utiles sont reportées.

x	$T =$	$S =$	$N =$	Commentaires	Valeur de $\ln X$ donnée par la calculatrice
1.1	0.095	0.1	3		0.953...
1.3	0.2619	0.264	5		0.2623...
1.5	0.4046	0.4072	7		0.4054..
1.7	0.5278	0.5350	9		0.5306..
1.9	0.6380	0.6463	19		0.6418
2	0.68817217931	0.69817217931	101		0.693147..

1.4 A l'assaut du calcul approché de $\ln X$ pour tout X strictement positif.

X est choisi parmi les réels strictement positifs, on se propose se calculer une valeur approchée de $\ln X$ en s'aidant des programmes précédents.

Soit X un réel de $]0,1]$, on a $\ln X = -\ln\left(\frac{1}{X}\right)$ et $\frac{1}{X}$ est un réel supérieur ou égal à 1. On en déduit donc qu'il suffit de savoir calculer le logarithme d'un réel de $[1,+\infty[$ pour résoudre le problème.

Soit donc un réel X supérieur ou égal à 1, on pose $X = 1 + x$.

1.4.1 Décomposition du réel X

On montre que l'on peut trouver un entier naturel k tel que

$$\begin{aligned} X &= 1 + x = 2^k y \\ \text{où } y &\in [1,2[\end{aligned}$$

La suite géométrique u de premier terme $u_0 = X$ et de raison $q = \frac{1}{2}$ est strictement décroissante et converge vers 0. Comme X est supérieur ou égal à 1, il existe un unique entier k tel que

$$u_{k+1} < 1 \leq u_k$$

c'est à dire

$$\frac{X}{2^{k+1}} < 1 \leq \frac{X}{2^k}$$

d'où il existe un entier naturel k tel que :

$$1 \leq \frac{X}{2^k} < 2$$

c'est à dire tel que : $X = 1 + x = 2^k y$ où y désigne un réel de $[1,2[$.

1.4.2 Application au calcul de $\ln X$

D'après l'analyse précédente, on peut écrire que :

$$\ln X = \ln y + k \ln 2$$

Si on veut trouver un encadrement de $\ln X$ d'amplitude P, il suffit de connaître un encadrement de $\ln y$ et $\ln 2$ d'amplitude $\frac{P}{k+1}$.

Cela amène donc à l'algorithme suivant (on suppose que l'on dispose du sous programme TRA12

```
Demander X et P
Mettre X dans Z : Si X < 1 alors mettre 1/X dans X
  Mettre 0 dans K                                  |
  Tant que X ≥ 2                                   | Calcul de K et Y
  Mettre X/2 dans X : Augmenter K de 1             |
  Fin du Tant Que                                  |
Mettre P/(K + 1) dans P
Executer le programme TRA12
Mettre {T, S} dans la liste L1
Si K ≠ 0
  Alors mettre 2 dans X                            | Calcul de ln(2)
  Executer le programme TRA12
Fin du si
ajouter K ∗ {T, S} à la liste L1
Si Z > 1
Alors afficher L1
Sinon Afficher −L1
Fin du Si
```

Cela donne les programmes suivants :

CALCLNX		
TI-83	Casio	TI-92
ClrHome	ClrText	calclnx(x,p)
Prompt X,P :X→Z	"X=" ?→X :"P=" ?→P :X→Z	Prgm
If X<1	If X<1	x→z
Then	Then 1/X→X	If x<1
1/X→X	IfEnd	Then
End	0→K	1/x→x
0→K	While X>=2	EndIf
While X>=2	X/2→X	0→k
X/2→X	K+1→K	While x>=2
K+1→K	WhileEnd	x/2→x :k+1→k
End	P/(K+1)→P	EndWhile
P/(K+1)→P	Prog "TRA12"	tra12(x,p/(k+1)
prgmTRA12	{T,S}→List 1	{t,s}→l1
{T,S}→L_1	If K≠ 0	If k≠ 0
If K≠ 0	Then 2→X	Then
Then	Prog "TRA12"	tra12(2,p/(k+1))
2→X :prgmTRA12	IfEnd	EndIf
End	List 1+K*{T,S}→List 1	l1+k*{t,s}→l1
L_1+K*{T,S}→L_1	If Z>1	If z >1
If Z>1	Then List 1	Then
Then	Else -List 1	disp l1
Disp L_1	IfEnd	Else
Else		disp -l1
Disp -L_1		EndIf
End		EndPrgm

Remarque : La TI-92 est supposée en mode `Calcul Approché`.
On obtient par exemple (avec $P = 0,01$)

$X =$	$\ln X$ (avec machine)	Borne inférieure obtenue	Borne supérieure obtenue
3	1.0986...	1.0953..	1.1029...
5	1.6094379..	1.60594..	1.6135..
587	6.3750..	6.3705..	6.3796..
0.18	$-1.714..$	$-1.7185..$	$-1.7113..$

Remarque 4 *Le lecteur est invité à évaluer le temps de calcul de* $\ln 587$*. Que peut-on en penser ? (Voir également l'annexe* 1*)*

Remarque 5 *Il peut sembler intéressant de stocker la valeur de* $\ln 2$ *après un calcul préliminaire, mais il y a une méthode plus efficace.*

1.4.3 Amélioration possible

On peut estimer le nombre d'étapes à faire pour le calcul de $\ln(1+x)$. avec $x \in [0,1]$. On a vu que dans le pire des cas (i.e. lorsque $x = 1$, donc pour le calcul de $\ln 2$), il faut choisir $k \geq \frac{1}{2P}$ pour que U_k et V_k fournissent une valeur approchée de $\ln 2$ à la précision P. Si $x \neq 1$, il suffit d'avoir $\dfrac{x^{2k}}{2k} \leq P$ ou même simplement

$$\frac{x^{2k}}{2} \leq P \Longleftrightarrow k \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{2P}\right)}{-2\ln(x)} \qquad (I)$$

La différence entre l'estimation grossière (en $\frac{1}{p}$) et celle ci (en $\ln \frac{1}{P}$) est considérable. On peut cependant objecter que pour x proche de 1, la méthode proposée risque d'être peu efficace (présence d'une division par $\ln x$ qui est proche de 0). C'est assez juste, et pour $x = 1$ (i.e. pour le calcul de $\ln 2$), la convergence est d'une lenteur extrême. Cependant l'inégalité (I) est grossière et, par exemple pour $P = 10^{-6}$ et $x = 1 - \dfrac{1}{10^3}$, on a $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{2P}\right)}{-2\ln(x)} = 6557,9$. On est donc certain que $U_{6\ 558}$ fournit une approximation de $\ln(1+x)$ à 10^{-6} près. En réalité le calcul de $\ln(1+x)$ demande celui de U_k où k est le premier entier tel que $\dfrac{x^{2k}}{2k} \leq 10^{-10}$. Un bon logiciel de calcul formel permet de résoudre l'équation $\dfrac{x^{2k}}{2k} = 10^{-10}$ et donne $k = 2\ 624$. Le gain est très appréciable mais pas suffisant pour rendre l'algorithme proposé utilisable. Malheureusement pour $x = 1$, le pire des cas, le calcul de $\ln 2$ à la précision 10^{-6} demande, quand a lui, le calcul de $U_{500\ 000}$.
En conclusion, la méthode proposée, sans être très performante est relativement efficace pour le calcul de $\ln(1+x)$ avec $x \in [0,1[$. Son efficacité diminue lorsque x s'approche de 1. Elle devient inutilisable si $x = 1$ i.e. pour le calcul de $\ln 2$.
Etrange paradoxe, car l'algorithme proposée pour le calcul de $\ln(X)$ dans le cas général utilise celui de $\ln 2$. La lenteur du calcul de $\ln 587$ s'explique par celui, intermédiaire, de $\ln 2$. Pour améliorer les performances, il nous faut ruser et calculer plus efficacement $\ln 2$. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) &= \ln\left(\frac{9}{8}\right) = 2\ln(3) - 3\ln(2) \\ \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) &= \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 2\ln(2) - \ln(3) \end{aligned}$$

d'où

$$\ln 2 = 2\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{8}\right)$$

Remarque 6 *On peut consulter l'annexe 2 pour plus d'informations sur cette "astuce".*

Il suffit donc de connaître un encadrement de $\ln\left(\frac{9}{8}\right)$ et $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ d'amplitude $\frac{P}{3k+3}$ pour obtenir un encadrement de $\ln 2$ d'amplitude $\frac{P}{k+1}$. La division par 3 de l'amplitude est plus que compensée par la rapidité du calcul de ces deux logarithmes.
Voici, par exemple la modification de l'algorithme et du programme sur une TI-89. L'application aux autres machines étant alors évidente.

Ancien Algorithme	Ancien programme

Si $K \neq 0$
Alors Mettre 2 dans X : Exécuter le programme TRA12
Fin du si
	`If k≠ 0`
	`Then`
	`tra12(2,p/(k+1)`
	`EndIf`

Nouvel Algorithme	Nouveau programme (CALCLNX1)

Si $K \neq 0$
Mettre $\frac{9}{8}$ dans X : Exécuter le programme TRA12
Mettre $\{t,s\}$ dans $L2$
Mettre $\frac{4}{3}$ dans X : Exécuter le programme TRA12
Mettre $L2 + 2 * \{t,s\}$ dans $\{t,s\}$
Fin du Si
	`If k≠ 0`
	`Then`
	`tra12(9/8,p/(3k+3)`
	`{t,s}→l2`
	`tra12(4/3,p/(3k+3)`
	`2*{t,s}+l2→l2`
	`EndIf`

Remarque 7 *Le temps de calcul de* $\ln 587$ *à la précision* $P = 0,01$ *passe de* $\frac{1}{2}$ *minutes à moins de 2 secondes.*

1.4.4 Un dernier raffinement

Avec la dernière modification, le temps de calcul devient raisonnable. Cependant, un essai avec $x = 255$ (ou 511) montre que, si $X = 2^k y$ avec y proche de 2, la méthode proposée atteint ses limites. Pour y remédier, il suffit de ramener y près de 1.
On utilise alors l'astuce suivante : si $y > \sqrt{2}$, alors on écrit

$$X = 2^{k+\frac{1}{2}} \frac{y}{\sqrt{2}}$$

On remplace ainsi y par $\frac{y}{\sqrt{2}}$ et k par $k + \frac{1}{2}$. L'intérêt de la division par $\sqrt{2}$ provient du fait que l'intervalle $]\sqrt{2}, 2]$ a pour image $]1, \sqrt{2}]$.
Les modifications à apporter sont les suivantes

Ancien Algorithme	Ancien programme

Tant que $X \geq 2$
Mettre $X/2$ dans X : Augmenter K de 1
Fin du Tant Que
Calcul de ln(y)
	`While x>=2`
	`x/2→x :k+1→k`
	`EndWhile`
	`tra12(2,p/(k+1)`

Nouvel Algorithme	Nouveau programme (CALCLNX2)

Tant que $X \geq 2$
Mettre $X/2$ dans X : Augmenter K de 1
Fin du Tant Que
Si $y > \sqrt{2}$ alors
mettre $y/\sqrt{2}$ dans y
mettre $k + \frac{1}{2}$ dans k
Calcul de ln(y)
	`While x>=2`
	`x/2→x :k+1→k`
	`EndWhile`
	If x>$\sqrt{}$(2)
	Then
	k+1/2→ k
	x/$\sqrt{}$(2)→ x
	EndIf
	`tra12(2,p/(k+1))`

Quelques essais suffisent pour se convaincre de l'amélioration.

Remarque 8 *Si on s'autorise que les quatre opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication et division), il faut stocker une valeur approchée de $\sqrt{2}$ dans le calculateur. Le calcul de la racine carré est alors un autre problème.*

Remarque 9 *Les puristes peuvent également utiliser l'astuce suivante : si $y \geq \frac{3}{2}$, on remplace y par $\frac{2y}{3}$. Cela pose le problème du calcul de $\ln 3$, mais quelques minutes de réflexions montrent qu'il est déjà réglé.*

1.5 Un autre moyen de calculer $\ln X$

Si l'on accepte d'autres opérations que les quatre opérations classiques, on peut proposer une autre méthode de travail.
Soit X un réel supérieur ou égal à 1, la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 = X \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

est décroissante et converge vers 1. Il existe un entier k pour lequel

$$1 \leq u_k < 2$$

On a alors

$$X = u_k^{2k}$$

et ainsi

$$\ln X = 2k \ln (u_k)$$

Cela donne pour algorithme

Demander X et P Mettre X dans Z Si $X < 1$ alors mettre $\frac{1}{X}$ dans X 0 dans K Tant que $X > 2$ Mettre $\sqrt{X}$ dans X Augmenter K de 1 Fin du Tant Que Mettre $P/(2K)$ dans P Executer le programme TRA12 Mettre $2K * \{T, S\}$ dans la liste $L1$ Si $Z > 1$ Alors afficher $L1$ sinon Afficher -$L1$ Fin du Si	Calcul de N Calcul de ln(X)

Ce qui donne les programmes :

CALCLNXX

TI-83	Casio	TI-92

ClrHome
Prompt X,P :X→Z
If X<1
Then
1/X→X
End
0→K
While X>2
√X→X
K+1→K
End
 	
P/(2K)→P
prgmTRA12
2K*{T,S}→L_1
If Z>1
Then
Disp L_1
Else
Disp -L_1
End
	ClrText
	"X=" ?→X :"P=" ?→P :X→Z
	If X<1
	Then 1/X→X
	IfEnd
	0→K
	While X>2
	√X→X
	K+1→K
	WhileEnd
	
	P/(2K)→P
	Prog "TRA12"
	2K*{T,S}→List 1
	If Z>1
	Then List 1▼
	Else -List 1▼
	IfEnd
		calclnx(x,p)
		Prgm
		x→z
		If x<1
		Then
		1/x→x
		EndIf
		0→k
		While x>2
		√x→x :k+1→k
		EndWhile
		tra12(x,p/(2k)
		2k*{t,s}→l1
		If z >1
		Then
		disp l1
		Else
		Disp -l1
		EndIf
		EndPrgm

$X =$	$\ln X$ (avec machine)	Borne inférieure obtenue	Borne supérieure obtenue
3	1.0986...	1.0950..	1.1039...
5	1.6094379..	1.6065..	1.6163
587	6.3750..	6.3730..	6.3796..
0.18	$-1.714..$	$-1.7170..$	$-1.713..$

Remarque 10 *Cette deuxième méthode est plus rapide que celle proposée initialement. Il suffit de comparer les temps de calcul pour* 587 *et* 187 *par exemple (cf annexe* 1)

2 Une seconde méthode

Les notations utilisées sont celles vues dans la première méthode 1. Certains résultats établis sont réutilisés.

2.1 Etude de Fonctions

On commence par montrer que pour tout réel x de $[0,1[$ et pour tout entier naturel n, on a

$$F_n(-x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \leq \ln(1-x) \leq F_n(-x) \tag{1}$$

Du tableau de variations de G_n, on déduit que pour tout réel α de $]-1,0]$, $G_n(\alpha) \leq 0$. D'où la relation

$$\ln(1+\alpha) \leq Fn(\alpha)$$

En Posant $x = -\alpha$, on en déduit que, pour tout x de $[0,1[$, on a le membre de droite de 1

$$\ln(1-x) \leq F_n(-x)$$

On etude ensuite la fonction H_n définie sur $[0,1[$par

$$H_n(x) = \ln(1-x) - F_n(-x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} = G_n(-x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

On a

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= -G_n'(-x) + \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)(1-x)x^n + x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-x^n}{1-x} + \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)(1-x)x^n + x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)^2} \end{aligned}$$

n en déduit que H_n' est positive ou nulle sur $[0,1[$ et donc que H_n est croissante sur $[0,1[$. Comme $H_n(0)$, la partie gauche de 1 en découle.

$$F_n(-x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \leq \ln(1-x)$$

La double inégalité annoncée est ainsi démontrée.

2.2 Etude de suites

Soit x un réel choisi dans $[0,1[$, on définit les suites W et Z par

$$\begin{aligned} W_k &= F_k(-x) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)(1-x)} \\ Z_k &= F_k(-x) \end{aligned}$$

lorsque k désigne un entier naturel non nul.
On montre que les suites W et Z convergent toutes deux vers $ln(1-x)$. Au vu des définitions des suites, on peut écrire en tenant compte des résultats établis auparavant que

$$\forall k \in \mathbb{N},\, W_k \leq \ln(1-x) \leq Z_k$$

ce qui donne

$$W_k - Z_k \quad \leq \quad \ln(1-x) - Z_k \leq 0 \implies -\frac{x^{k+1}}{(k+1)(1-x)} \leq \ln(1-x) - Z_k \leq 0$$

le réel x étant choisi dans $[0,1[$, le terme x^{k+1} tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. La limite de $\frac{x^{k+1}}{(k+1)(1-x)}$ quand k tend vers $+\infty$ est donc de 0. On en déduit immédiatement que les suites Z et W convergent toutes deux vers $\ln(1-x)$

2.3 Recherche d'un encadrement de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour x choisi dans $[0,1[$

Pour tout réel x de $[0,1[$, et pour tout entier k, on a établi que

$$\begin{aligned} F_{2k}(x) &\leq \ln(1+x) \leq F_{2k-1}(x) \\ F_{2k}(-x) - \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x)} &\leq \ln(1-x) \leq F_{2k}(-x) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$F_{2k}(x) - F_{2k}(-x) \leq \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \leq F_{2k-1}(x) - F_{2k}(-x) + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x)}$$

Ce qui en simplifiant donne

$$2x + \frac{2x^3}{3} + \cdots + \frac{2x^{2k-1}}{2k-1} \leq \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \leq 2x + \frac{2x^3}{3} + \cdots + \frac{2x^{2k-1}}{2k-1} + \frac{x^{2k}}{2k} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x)}$$

i.e.

$$2\sum_{p=1}^{k} \frac{x^{2p-1}}{2p-1} \leq \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \leq 2\sum_{p=1}^{k} \frac{x^{2p-1}}{2p-1} + \frac{x^{2k}}{2k} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x)}$$

Remarque 11 *L'égalité* $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right)$ *porte le nom de série de Gregory*[2] *(1668)*

2.3.1 Application

On se donne un réel strictement positif noté P et on cherche un encadrement de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ d'amplitude inférieure ou égale à P.
Le terme $\dfrac{x^{2k}}{2k} + \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x)}$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Dès qu'il est inférieur ou égal à P, l'inégalité précédente nous fournit un encadrement de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ d'amplitude inférieure ou égale à P.
On peut alors considérer les deux exemples historiques suivants.

Pour $x = \dfrac{1}{3}$ (Gregory) On obtient

$$0 \leq 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)\cdot 3^{2k-1}}\right) - \ln 2 \leq \frac{1}{2k\cdot 3^{2k}} + \frac{3}{2(2k+1)3^{2k+1}}$$

pour obtenir $\ln 2$ à la précision $P = 10^{-6}$, il suffit d'avoir

$$\frac{1}{2k\cdot 3^{2k}} + \frac{3}{2(2k+1)3^{2k+1}} = \frac{3k+1}{2k(2k+1)9^k} \leq 10^{-6}$$

[2] Gregory James- Aberdeen 1638-Edimburg 1675. Mathématicien écossais, plus connu pour la série donnant $\arctan x$.

En majorant $\dfrac{3k+1}{2k\,(2k+1)}$ par $\dfrac{4}{8}$ (car c'est une fonction décroissante prenant la valeur $\dfrac{4}{8}$ en $k=1$), il suffit d'avour

$$\frac{4}{8\cdot 9^{k}} \leq 10^{-6} \Longleftrightarrow k \geq 6$$

Six termes suffisent donc au calcul demandé.

L'astuce de Newton Newton (et Euler) remarque que $2 = \left(\dfrac{4}{3}\right) \times \left(\dfrac{3}{2}\right)$, et utilise cette décomposition pour en déduire que

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{3}{2} \\ &= \ln\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} + \ln\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

En utilisant la série de Grégory, on obtient alors à la fois le calcul de $\ln 2$ mais aussi celui de $\ln 3 = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right) - 2\ln 2$.

2.4 Application au calcul approché de $\ln(X)$ pour tout réel X

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(t) = \dfrac{1+t}{1-t} = \dfrac{2}{1-t} - 1 = \dfrac{2}{1-t} - 1$. On fait un étude rapide de cette fonction. On a $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = +\infty$, la dérivée est strictement positive sur $[0,1[$, f réalise une bijection de $[0,1[1[$ vers $[1,+\infty[$ (dont la bijection réciproque est $f^{-1}(X) = -\dfrac{1-X}{1+X}$). Par conséquent si X est un réel de $[1,+\infty[$ et t le réel de $[0,1[$ vérifiant $X = f(t)$, on a $\ln X = \ln(f(t)) = ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$. Or on vient de montrer comment trouver un encadrement d'amplitude P de cette dernière quantité, on sait donc trouver un encadrement d'amplitude P du réel $\ln(X)$.

Lorsque X appartenant à $]0,1[$, on applique le cas précédent avec $\dfrac{1}{X}$. On peut alors proposer un algorithme de recherche de l'encadrement :

2.4.1 Algorithme

On en déduit l'algorithme suivant

Programme principal :CALCLNX2

Demander X et P Mettre X dans Z Si $X < 1$ alors mettre $\dfrac{1}{X}$ dans X Mettre $\dfrac{X-1}{X+1}$ dans T Executer le programme calculant $\ln T$ et l'encadrement Mettre $\{I,S\}$ dans la liste $L1$ Si $Z > 1$ Alors afficher $L1$ sinon Afficher $-L1$ Fin du Si

Sous-Programme ENCADRE1

Mettre 1 dans K
Mettre $2T$ dans I
Tant que $\dfrac{T^{2k}}{2k}+\dfrac{T^{2k+1}}{(2k+1)(1-T)}>P$
K augmente de 1
Mettre $I+2\dfrac{T^{2K-1}}{2K-1}$dans I
Fin du Tant Que
Mettre $I+\dfrac{T^{2k}}{2k}+\dfrac{T^{2k+1}}{(2k+1)(1-T)}$ dans S

2.4.2 Programmes

Ce qui nous donne les programmes suivants :
Sous-programme ENCADRE1

ENCADRE1	
TI-83	Casio
1→K 2T→I While T^(2*k)/2/k+T^(2*k+1)/(2*k+1)/(1-T)>P K+1→K I+2*T^(2*k-1)/(2*k-1)→I End I+T^(2*k)/2/k+T^(2*k+1)/(2*k+1)/(1-T)→S	1→K 2T→I While T^(2*k)/2/k+T^(2*k+1)/(2*k+1)/(1-T)>P K+1→K I+2*T^(2*k-1)/(2*k-1)→I WhileEnd I+T^(2*k)/2/k+T^(2*k+1)/(2*k+1)/(1-T)→S

```
TI-92
encadre1(t,p)
Prgm
1→k
2*t→i
While t^(2*k)/2/k+T^(2*k+1)/(2*k+1)/(1-t)>p
k+1→k
i+2*t^(2*k-1)/(2*k-1)→i
EndWhile
i+t^(2*k)/2/k+t^(2*k+1)/(2*k+1)/(1-t)→s
EndPrgm
```

Programme Principal : CALCLNX2

CALCLNX2		
TI-83	Casio	TI-92

ClrHome
Prompt X,P :X→Z
If X<1
Then
1/X→X
End
(X-1)/(X+1)→T
prgmENCADRE1
{I,S}→L_1
If Z>1
Then
Disp L_1
Else
Disp -L_1
End
	ClrText
	"X=" ?→X :"P=" ?→P :X→Z
	If X<1
	Then 1/X→X
	IfEnd
	(X-1)/(X+1)→T
	Prog "ENCADRE1"
	{I,S}→List 1
	If Z>1
	Then List 1▲
	Else -List 1▲
	IfEnd
		calclnx2(x,p)
		prgm
		x→z
		If x<1
		Then
		1/x→x
		EndIf
		(x-1)/(x+1)→t
		encadre1(t,p)
		{i,s}→l1
		If z >1
		Then
		disp l1
		Else
		disp -l1
		EndIf
		EndPrgm

On peut alors compléter le tableau suivant (P étant choisi égal à 0.01) (Seules les décimales utiles ont été mises) :

x	I	S	$K=$	Commentaires	$\ln X$ donné par la calculatrice
1.5	0.4053...	0.4058..	2		0.4054...
2	0.691..	0.695..	2		0.693.....
10	2.296..	2.304	9		2.302...
587	6.3670..	6.376995..	497		6.3750..
0.2	−1.6109...	−1.606..	5		−1.609...
0.05	−2.997..	−2.9896..	18		−2.9957..

Annexe 1

Evaluation des temps de calculs pour les différents algorithmes (avec une Ti89 ou 92)

Les calculatrices Ti ne disposent pas de fonction donnant la durée d'exécution d'un programme. On peut cependant trouver sur le Web à l'adresse `http://tiger.towson.edu/~bbhatt1/ti/timing.zip` l'application `timing` qui réalise cette fonctionnalité (de manière médiocre, mais cela donne un bon ordre d'idée)

Le tableau suivant indique les durées d'exécution en secondes des programmes $CALCLNX$, $CALCLNX1$ et $CALCLNX2$ pour les calculs de $\ln 2$, $\ln 127$, $\ln 256$, $\ln 587$ à la précision $0,001$.

	CALCLNX	CALCLNX1	CALCLNX2
$\ln 2$	$\approx 65\ s$	$< 1\ s$	$< 1\ s$
$\ln 127$	$\approx 240\ s$	$\approx 14\ s$	$\approx 2\ s$
$\ln 256$	$\approx 293\ s$	$\approx 1\ s$	$\approx 1\ s$
$\ln 587$	$\approx 326\ s$	$\approx 2\ s$	$\approx 2\ s$
$\ln 1023$	$\approx 389\ s$	$\approx 60\ s$	$\approx 2\ s$

Annexe 2

A propos de la conjecture de Catalan

Pour améliorer la méthode, on a utilisé l'astuce suivante

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) &= \ln\left(\frac{9}{8}\right) = 2\ln(3) - 3\ln(2) \\ \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) &= \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 2\ln(2) - \ln(3) \end{aligned}$$

d'où

$$\ln 2 = 2\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{8}\right)$$

La question que l'on peut se poser est la suivante.

Problème 1 *Peut-on trouver d'autres entiers p, q, m, n tels que* $\ln\left(1+\frac{1}{2^p}\right) = \ln\left(\frac{3^m}{2^p}\right)$ *et* $\ln\left(1+\frac{1}{3^q}\right) = \ln\left(\frac{2^n}{3^q}\right)$.

Ce problème se réduit à la recherche des solutions entières de $2^p + 1 = 3^m$ et de $3^q + 1 = 2^n$.

Proposition 12 *Les seules solutions dans $\mathbb{N}$ de $3^q + 1 = 2^n$ sont $(q,n) = (0,1)$ et $(p,m) = (1,2)$*

Preuve. *Si $n \geq 3$ on écrit $2^n = 8 \times 2^{n-3}$ et ainsi $2^n \equiv 0\ (8)$. Mais $3^2 = 9 \equiv 1\ (8)$ d'où suivant l'imparité de q on a*

$$\begin{aligned} 3^q + 1 &= 9^{\frac{q}{2}} + 1 \equiv 2\ \ (8)\ \ \textit{si } q \textit{ est pair} \\ 3^q + 1 &= 3 \times 9^{\frac{q-1}{2}} + 1 \equiv 4\ \ (8)\ \ \textit{si } q \textit{ est impair} \end{aligned}$$

Il ne peut donc pas y avoir de solutions si $n \geq 3$. L'étude (immédiate) des cas $n \leq 2$ ne donne que les solutions annoncées. ■

Proposition 13 *Les seules solutions dans* $\mathbb{N}$ *de* $2^p + 1 = 3^m$ *sont* $(p, m) = (1, 1)$ *et* $(3, 2)$

Preuve. *Si* $p \geq 2$, *le même raisonnement modulo* 8 *donne*

$$\begin{aligned} 2^p + 1 &\equiv 1 \ (8) \\ 3^m &\equiv 3 \ (8) \ \text{si } m \text{ est impair} \end{aligned}$$

ainsi, nécessairement m *est pair. Mais dans ce cas, si* $m = 2l$ *alors*

$$\begin{aligned} 3^m - 1 &= 3^{2l} - 1 \\ &= \left(3^l - 1\right)\left(3^l + 1\right) \\ &= 2^p \end{aligned}$$

Chaque facteur est nécessairement une puissance de 2. *Si on pose* $\left(3^l - 1\right) = 2^\alpha$ *et* $\left(3^l + 1\right) = 2^\beta$, *alors* $2^\beta = 2 + 2^\alpha$. *Pour pouvoir diviser par* 2, *il suffit de montrer que* $\alpha \geq 1$ *(car* $\beta > \alpha$*). Puisque* $l \geq 1$ *(*$m = 0$ *est à exclure) on a* $3^l - 1 \geq 2$ *et par conséquent* $\alpha \geq 1$.
En divisant par 2, *on obtient* $2^{\beta-1} = 1 + 2^{\alpha-1}$. *L'examen des parités donne* $\alpha = 1$ *d'où* $3^l = 3$ *et ainsi* $l = 1$, $m = 2$ *et* $p = 3$.
Reste le cas $p < 2$ *qui donne* $p = m = 1$ ■

Ces deux équations ont été résolues par Levi Ben Gerson[3] vers 1320. Plus généralement, on peut considérer la conjecture dite de Catalan

Conjecture 1 *L'équation diophantienne où les inconnues* x, y, n, p *sont des entiers naturels* ≥ 2

$$x^n - y^p = 1$$

n'a pas d'autre solution que $3^2 - 2^3 = 1$.

En 1844 Eugene Catalan[4] s'intéresse au problème de l'existence de deux puissances parfaites consécutives. Il conjecture que seuls 9 et 8 sont solutions. La conjecture dite de Catalan généralise ce problème. Elle vient d'être démontrée, en avril 2002, par P.Mihailescu, cf `http://www.math.u-bordeaux.fr/~yuri/publ/preprs/catal.pdf`

Le cas particulier de l'équation $x^2 = y^3 + 1$ qui n'admet comme solution que les couples $(\pm 1, 0)$ et $(\pm 3, 2)$ a été résolu par Euler.

---

[3] Levi Ben Gerson. Mathématicien français (Bagnols 1288- ? 1344)

[4] Eugene Catalan. Mathématicien Belge (Bruges 1814- Liège 1894). Il est connu pour sa conjecture et les nombres dits "de Catalan" qui interviennent dans des problèmes de parenthésages.