# “Tout devrait être rendu aussi simple que possible, mais pas plus.”
(A.Einstein)

**Expérimenter, observer, gesticuler**

**Conjecturer, mise à l’épreuve de la conjecture**

**Modéliser , théoriser : place et choix  du modèle.**

**Démontrer**

**Travail en groupe**

**Débat scientifique**

**Narration de recherche**

**Place du maître**

Plot n° 103

Acte COPIRELEM Tours 2001

Maths et Billard  par Marc Picot, Luc Picot, David Boutry

# 1

## Présentation sommaire du jeu à toute la classe

Surprise : il n'y a pas de trous …. Présentation des différents types de billard.

Film :
fiche  1_a accueil classe

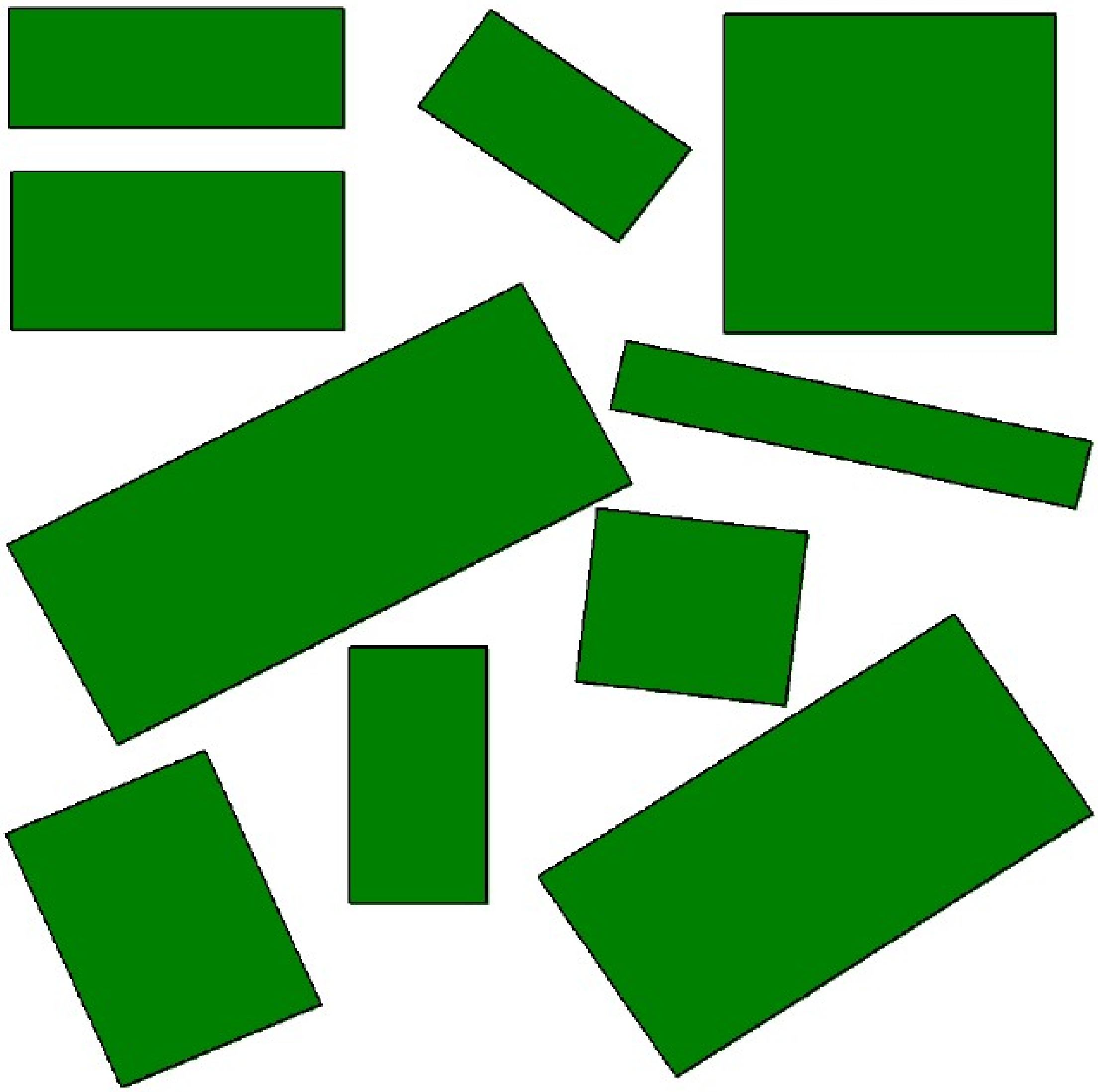
1mn 44s


Description de la table : c’est un rectangle double carré, entouré par des « bandes », avec des repères, les « mouches ».

Le coin du prof :

1)Reconnaître un rectangle.
Deux types de réponses :
*il a une longueur et une largeur
* il y a des angles droits
Définition : un rectangle est un quadrilatère qui a 4 angles droits.
On objectera que 3 angles droits suffisent :  faire dessiner un billard en codant (*rôle du codage)* ce que l’on fait ; en dessinant, on s’aperçoit qu’une fois le rectangle terminé, seul 3 angles droits sont codés : l’explication se trouvera dans la démonstration.
2)Travail pour les élèves  de CM, 6ème voire 5ème :
«Dessiner un rectangle qui « ressemble » à un billard et placer les mouches. » C’est la première dialectique dessin-réalité qui commence. C’est aussi l’occasion de  découvrir les intervalles, nombre d’élèves confondant le nombre de mouches avec le nombre d’. intervalles : pour trouver la distance entre 2 mouches, faut-il diviser par 7 ?

3) rectangles « billards» : oui ou non ?



Le coin du prof

Quand peut-on dire que 2 rectangles sont semblables ? 2 figures sont semblables ? Pourquoi le format des feuilles de papier a-t-il ces dimensions ?

Le maître explique le principe du billard : il se joue avec 3 billes, une rouge et deux blanches dont une pointée.

Le coin du prof :

Présentation des billes et les questions qui tuent : quelle est la plus lourde ? Quelle est la plus grosse ? La plupart des petits font un3 choix : grand doute sur leur envie de donner une réponse.

Le débat sur les « grandeurs » peut s'engager : masse, longueur , diamètre (comment le mesurer?), rayon, volume.

Avec sa bille poussée par la queue de billard, il faut toucher les deux autres billes (les *caramboler*). Chaque carambolage donne un point et le droit de rejouer. Le joueur essaie de faire une série.
Le maître met du bleu et donne la première consigne : *Mettre du bleu :*
*il n'est pas nécessaire de visser le procédé dans le bleu, histoire de le trouer. On frotte légèrement avec le coin du cube et ça suffit.*

Le maître fait quelques points, piège presque tous les élèves avec un casin : la bille joueur choque la deuxième bille qui choque la troisième, la joueuse ne rattrape pas la troisième : beaucoup d'élèves ne comprennent pas pourquoi le point n'est pas valable.
Le maître rate un point et donne la queue à un élève....qui se trouve bien embarrassé.
On passe alors à la fiche 2.

# 2 La visée

La plupart des joueurs sont incapables de définir ce qu'est la visée.
Le joueur pose la bille près d'un bord du billard,
Il pose la queue horizontalement sur le bois, le procédé près de la bille, au-dessus du centre de la bille, tous les doigts de la main arrière enrobent la queue sans la serrer.
Cette étape est cruciale pour la notion de « visée ».

*Viser, c'est faire coïncider la droite matérialisée par la queue avec la droite définie par les deux points bille et quille.*

Le coin du prof :

Une droite est cet objet géométrique unique déterminé par deux points.
axiomes du plan :
1) un plan admet des sous-ensembles propres appelés droites.
2) deux points déterminent une et une seule droite.
3) par un point hors d'une droite, on peut mener une et une seule parallèle à cette droite.

Le coin de l'élève :

Peut-on mettre la bille n'importe où ? Il faut mettre la bille bien en face de la quille (*voir film «Présentation»)*
Importance du geste pour mieux abstraire.
Dès que deux points sont choisis, on voit tous la même droite, qu'elle soit « tracée » ou non. On dit que la droite est définie par ces 2 points.

Un peu d'histoire et de philosophie :

La première tentative de *définir* ce qu'est un espace géométrique est due à Euclide (300 av JC), dans un ouvrage *Les éléments,* redécouvert au moyen-âge par les Arabes.
Il est très difficile de définir simplement ce qu'est une droite. Contrairement à Descartes qui affirmait que « *ce qui se conçoit clairement s'énonce clairement* », Pascal disait que « *il n'est pas nécessaire de définir les principes évidents* ». Ainsi en est-il (entre autres) de ce qu'est une droite.
L'irruption des géométries non euclidiennes au 19eme siècle ne va pas arranger les choses....... Imaginez un peu : *par deux points, on peut faire passer plus d'une droite.*

Il pose sa main à plat par-dessus la queue, index et majeur de chaque côté de la queue servant de guide.
4) la main avant ne bougeant plus, la main arrière fait faire à la queue un ou deux aller-retour de quelques centimètres (limage). Ce va-et-vient ne doit pas modifier la droite de visée.

Le coin du prof
La droite est cet unique objet globalement invariant par translation.
Limer, sans modifier la visée, c'est ça.

Importance du geste pour mieux abstraire.
Il est très difficile pour un élève d'accepter que la droite ne soit pas tracée. L'expérience de la visée apprend à l'élève à voir et à montrer du doigt cet objet très abstrait qu'est une droite. Les gestes posent des bases pour la compréhension. Autres situations :
Proportionnalité :
Ernest a couru, devant la classe, en vrai, un trajet en 11 secondes. Combien de temps mettra-t-il pour le faire 3 fois ? Comme tout le monde n'est pas convaincu (Ernest le premier), Ernest court ; il est tout surpris d'avoir dépassé les 33 secondes. Il est même prêt à recommencer.
Médiatrice :
Dans la cour, chasse au trésor pour 3 élèves. Les 3 sont assignés à un endroit ; où faut-il mettre le trésor à attraper pour que la course soit équitable ?
Les grandeurs :
on propose aux élèves de ranger des mots selon le critère suivant : la phrase « le mot A est aussi grand que le mot B » doit avoir un sens. S'il y a un doute, on jette. Sinon, on met dans la même colonne.
« le fil est plus grand que le crayon ». On peut *mettre* le fil le *long* du poteau et les mettre dans la même colonne. Ainsi chaque colonne se voit attribuer, en plus de tout le reste, un *geste* : parcourir (étirer,longer), étendre (peindre, lisser), remplir (emballer), attendre, porter (peser), grelotter, accélérer, …..
Le boulier : la compréhension des nombres, la pratique de l'addition, les trucs de calculs astucieux (expression plus didactique que calcul mental) se font avec les doigts.
Pavage : les élèves reçoivent des vrais quadrilatères, et ils les manipulent.
Démonstration : combien de problème commence par « on donne un triangle ABC ». Bernard Caziers donne vraiment un triangle à chacun.
Electricité :
pour comprendre la tension, on met ses doigts dans la prise.
Pliages, puzzle, architecture, etc…….

# 3

## Points alignés

Chaque groupe reçoit quelques quilles.
On donne quelques quilles à chaque groupe
Il faut abattre toutes les quilles d'un seul coup.

Le coin du prof :

Il est attendu que les élèves alignent les quilles, c’est évident. Eh,bien! non.
Certains élèvent font un petit paquet et sont contents d’avoir résolu le problème posé.
Certains autres placent les quilles n’importe comment et font le pari d’y arriver ; cette attitude semble caractériser les publics « difficiles » (PJJ, rouleurs de caisse))

Petit problème :
Je sais que si je pose 2 quilles sur le billard, je peux tracer une droite.
Je jette 3 quilles sur le billard ; combien puis-je tracer de droite ?
*Tous trouvent 3 droites. Le débat s’anime quand je dis que je ne peux en tracer qu’une seule ; je m’amuse bien en mettant un élève dans la confidence.*
Maintenant je jette 4 quilles ; 5 quilles.
,

Problème : sur un cercle, je place 10 points. Combien puis-je tracer de cordes ? 100 points ?

Le coin du prof :

* ce problème a été résolu par des CM et des PJJ
* belle occasion pour attaquer la proportionnalité : « pour 10 points », aurait-on le double de « pour 5 points » ?
* il est très important de laisser les élèves s'embringuer dans le dessin ; le prof les aide à travailler avec méthode. Deux principales :

- à partir de chaque point je trace 9 cordes (99) ; je peux le faire 10 fois (100 fois) ; mais chaque corde a été tracée 2 fois ; d'où la réponse : 10x9/2 = 45 (99x100/2 = 4950).
- à partir du premier point, je trace 4 cordes (99) ; du 2ème point, 3 cordes, … ce qui fat : 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 pour 100 cordes : 99 + 98 +…….+ 2+ 1 = 4950
- on recolle les deux :

  1+2+3+4= 4x5/2

  1+2+3+4+5+6+7+8+9=9*10/2

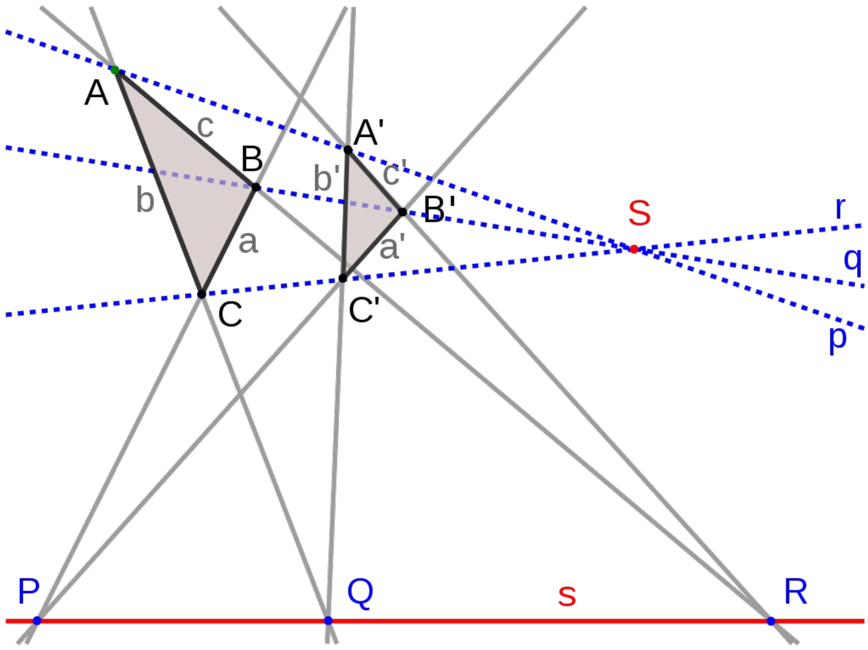
  1+2+3+…...+97+98+99 = 99x100/2

  pour les grands :

  pour n points sur un cercle, N = n = n(n-1)/2 , ce qui donne somme de 1 à n = n(n+1)/2

* le prof fait remarquer la difficulté d'aligner des points, problème qu'on trouve non seulement pour les visées, mais en math : équation d'une droite, proportionnalité, droite de Steiner, machines mécaniques, …..

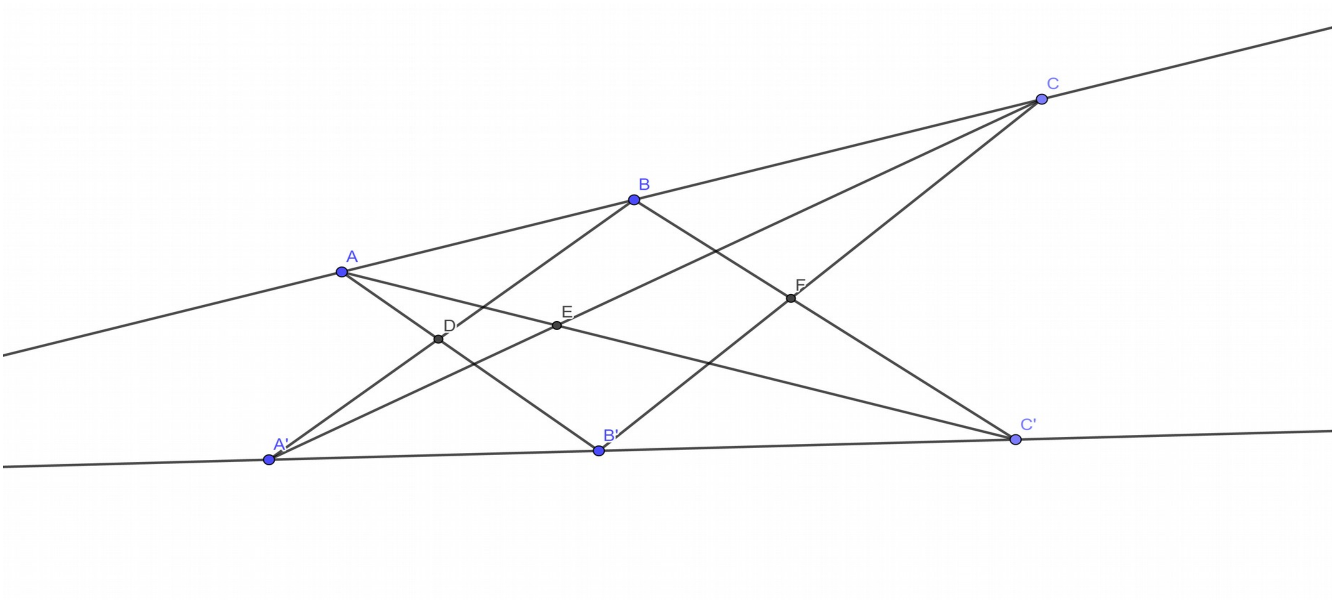
théorème de Desargues




qu’on trouve dans les livres de 6ème sous la forme :

A,B,C sont alignés sur une droite (d)
A’,B’,C’ sont alignés sur une autre droite (d’)

Vérifier que les  points E, F, G    (ce sont les intersections 2 par 2 des autres droites) sont alignés

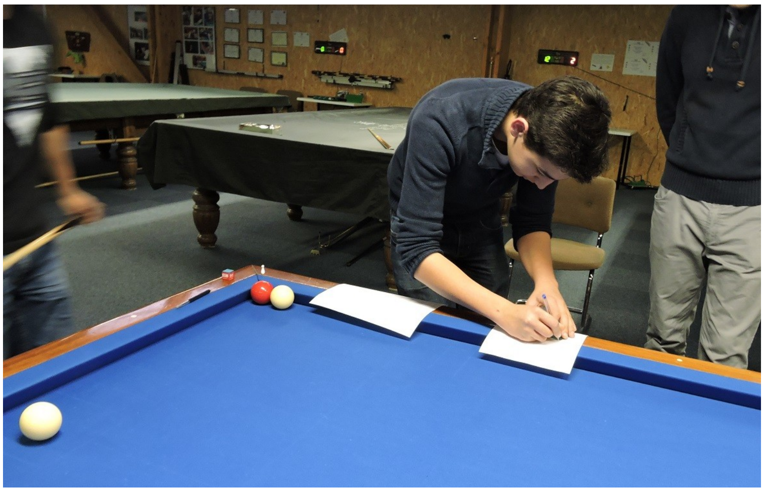


# 4

## Dessiner des trajectoires

Placer la bille et une quille à viser ; les repérer sur votre dessin.
Jouer . Dessiner la trajectoire obtenue.

Un autre élève rejoue le même coup : obtient-il la même trajectoire ? est-ce « normal » ?



Le coin du prof :

repérage :
pour les petits (CM, 6eme) et les élèves en difficulté, la tâche n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît.

La correspondance dessin-réalité est parfaite : les deux sont plans. Ce qui n'est pas la cas dans la vie courante. Le débat sur « ils ne voient pas en 3D » est ouvert…..

expérimenter :
le résultat d'une expérience n'est acceptable que s'il est reproductible. C'est pour cette raison qu'il est important de noter tout ce qui se passe.

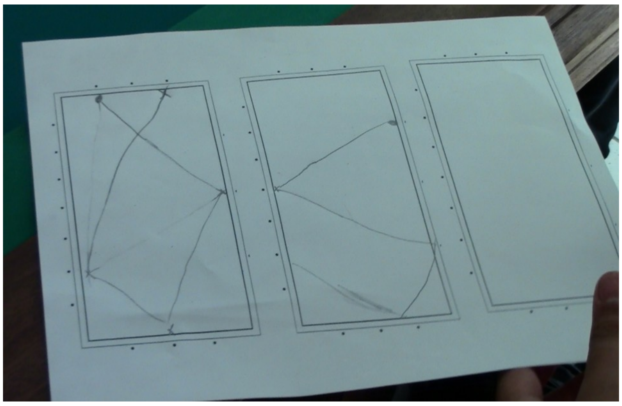


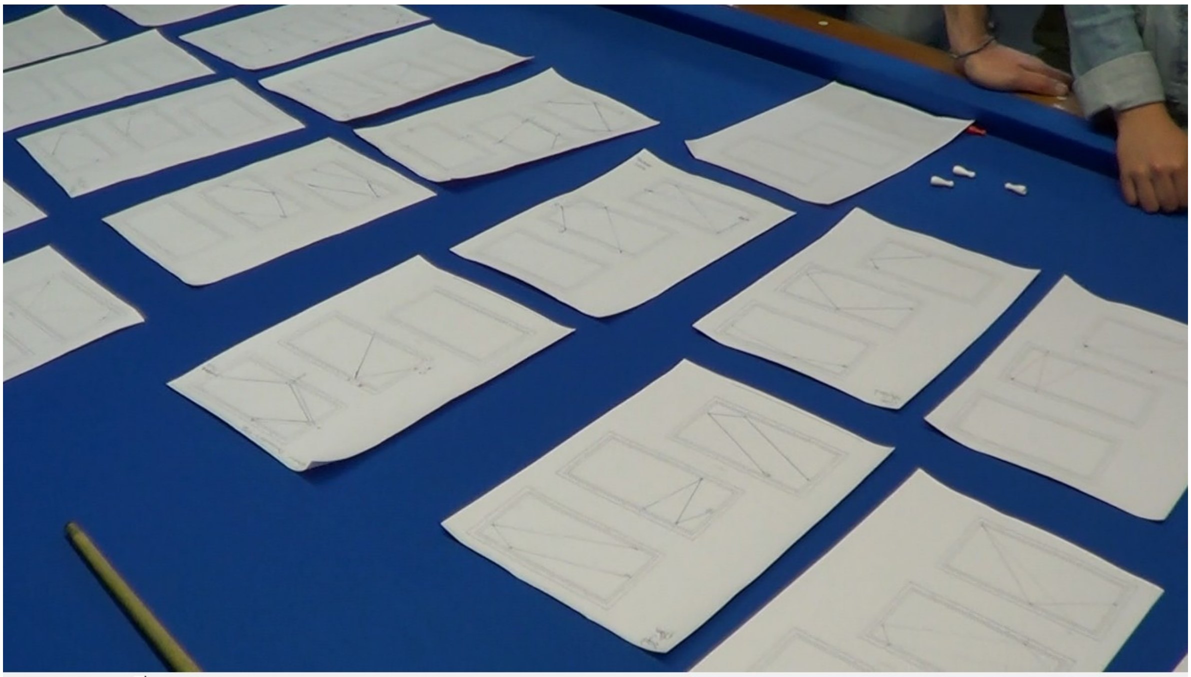
Photo ci-dessus : les 2 types de schémas  les plus fréquents

## 5

# Mise en commun des trajectoires réalisées

On rassemble les dessins de tous les élèves et on observe ensemble ces dessins .
Débat :

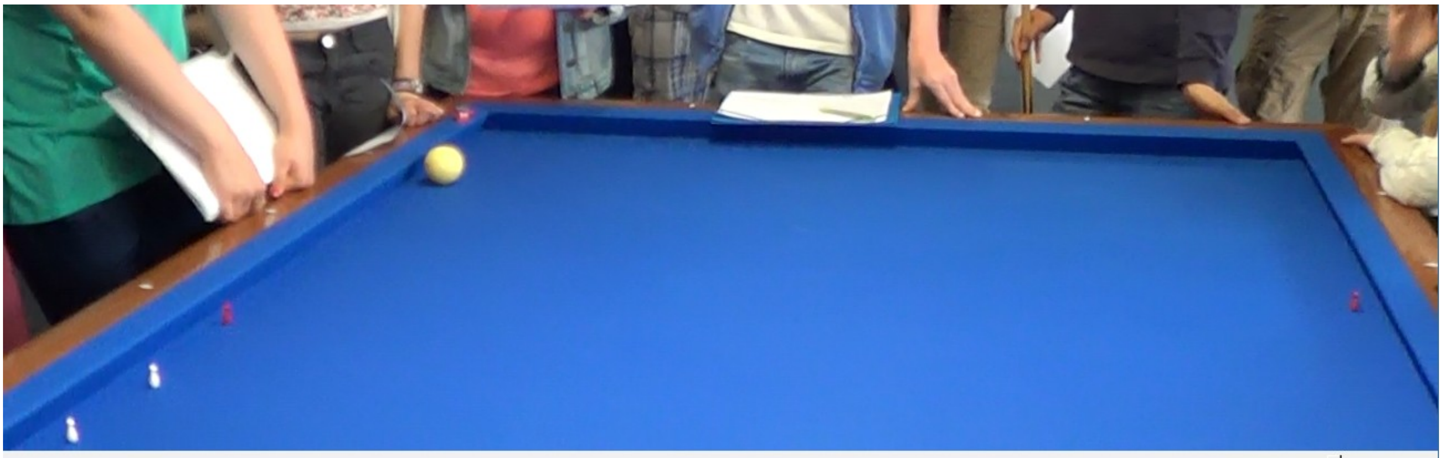
- peut-on reconnaître une bonne ou une fausse trajectoire ? peut-on être affirmatif ?
- les trajectoires qui se ressemblent.
- les invariants : on voit des parallèles, des parallélogrammes, etc.…
- les trajectoires insolites (les trajectoires perpendiculaires à un côté, ….)
- etc …….

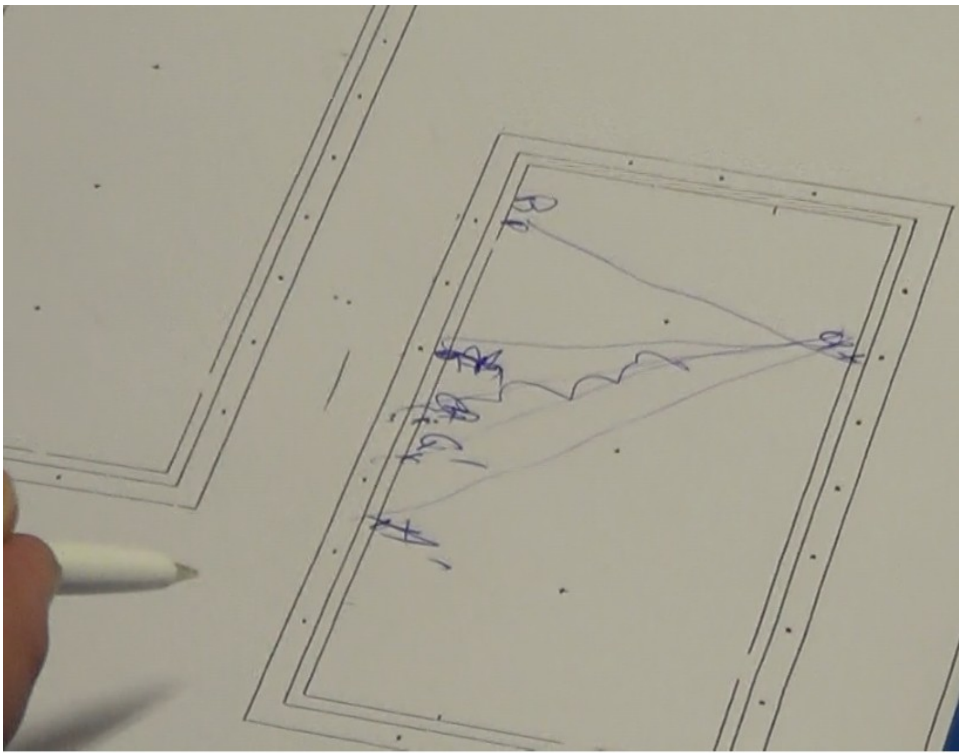


# 6
## Anticiper une trajectoire : trajet de la bille après un rebond

Citons Einstein :
*Le billard constitue l'art supérieur de l'anticipation. Il ne s'agit pas d'un jeu, mais d'un sport artistique complet qui nécessite une bonne condition physique, le raisonnement logique du joueur d'échecs et le toucher du pianiste de concert.*

Placer une bille et une quille près des bords. Marquer sur votre feuille ces 2 points.
Avant de jouer, placer une quille pour marquer l'endroit où la bille touchera le prochain bord après un (seul) rebond. Marquer votre proposition, ainsi que celles des copains.
Jouer ; comparer.
Faire autant d'expériences  que vous voulez, pour essayer de deviner la trajectoire après le rebond





# 7 Conjecturer, formaliser

Essayer de deviner la loi du rebond.
Première formalisation : *La bille fait ça, et puis après, ça…..*

## Formalisation

Les élèves proposent :

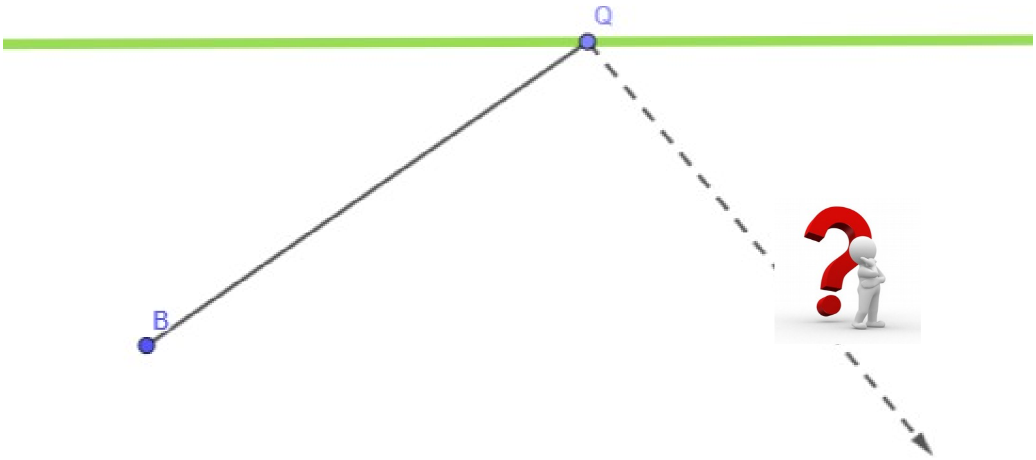
On voit un triangle isocèle
L'angle là est égal à l'angle là
On met le trajet de l'autre côté, comme ça. *Voir films « on va plier »*
Ça fait un angle droit *voir films « ça fait un droit »*

on compte les mouches. (voir Met M:ça ne marche pas si on dépasse le coin )

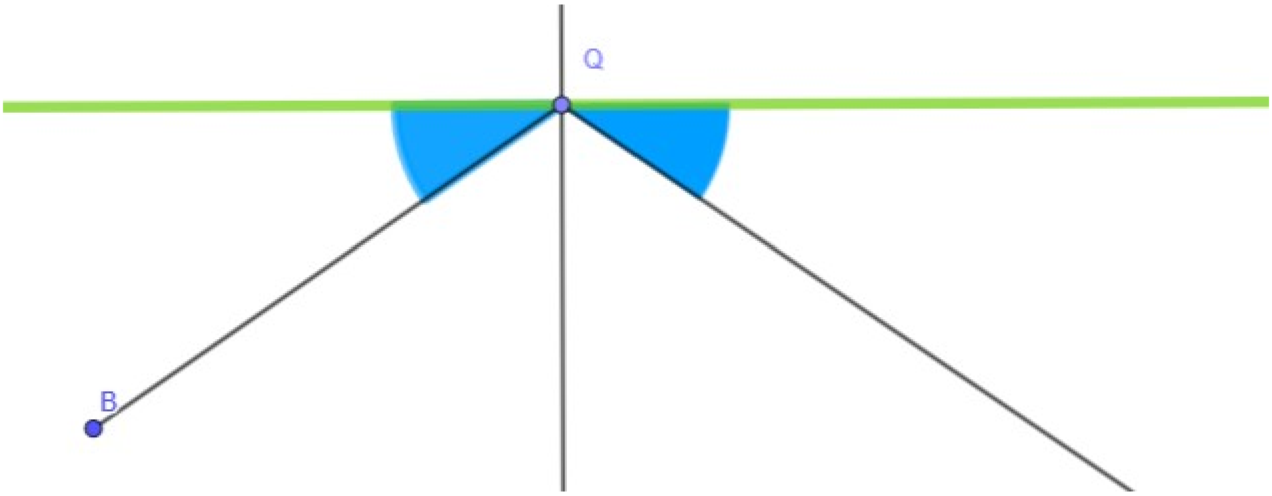
Ces discussions permettent au prof de mettre en évidence le choix de l'inconnue dans un problème (eh,oui ! Le « choix de l'inconnue » n'est pas une spécificité des équations)
Le professeur les aide à formaliser :

Qu'est-ce qu'un angle ? De quel angle parle-t-on ? voir films Trajet
Nécessité de tracer la perpendiculaire à la bande passant par le point de contact de la bille (point) avec la bande. C'est une formalisation très difficile pour les élèves.

## incidence = réflexion




On admet que la trajectoire est un trajet de lumière. Alors, on peut démontrer l'équivalence entre « plus court chemin » et « incidence = réflexion ».




Solution : On trace la perpendiculaire à la bande en Q. La trajectoire après le rebond est le symétrique de BQ par rapport cette droite.

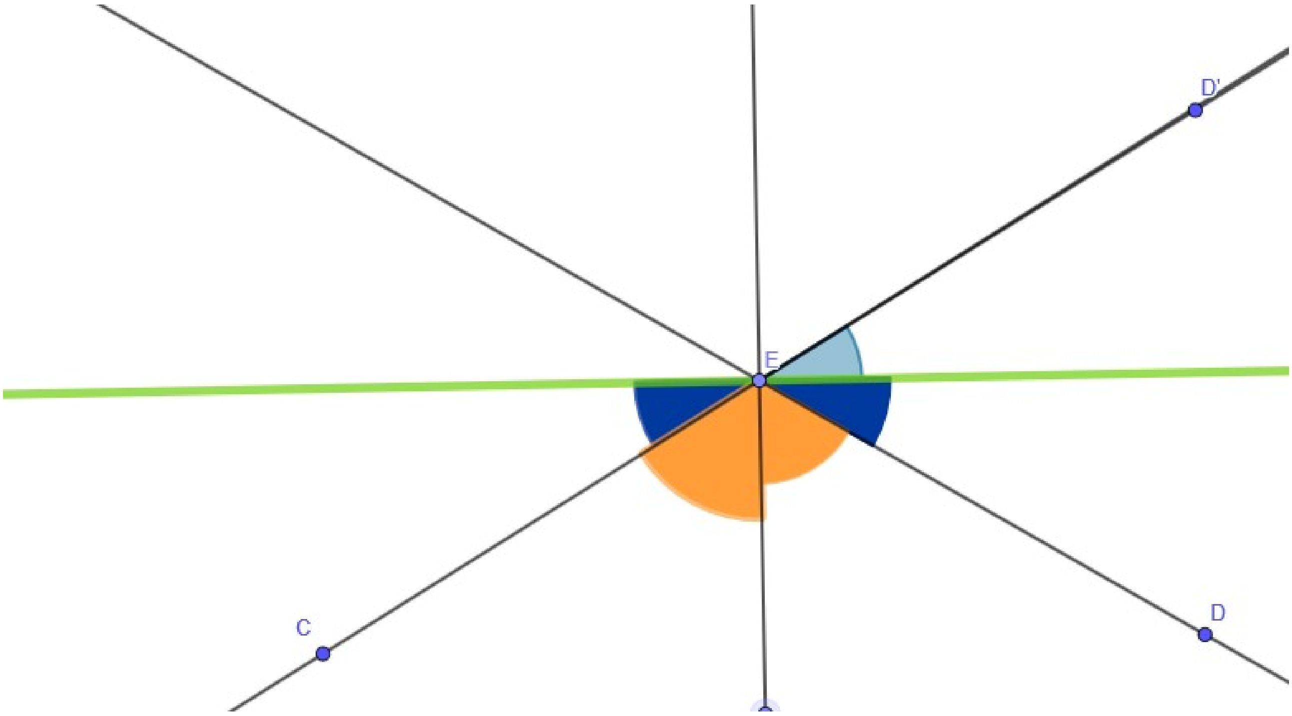
La bande fait des angles égaux  avec les trajectoires avant et après le rebond.  Les compléments s'appellent angle d'incidence et angle de réflexion respectivement. D'où la loi de la réflexion :

Angle de réflexion = angle d'incidence

Notons que les angles en bleu ne sont pas bien choisis : les angles d'incidence et de réflexion sont leurs compléments (en orange sur le dessin suivant)

## Angles égaux :

On peut démontrer que la loi incidence = réflexion est équivalente à la loi de plus court trajet.



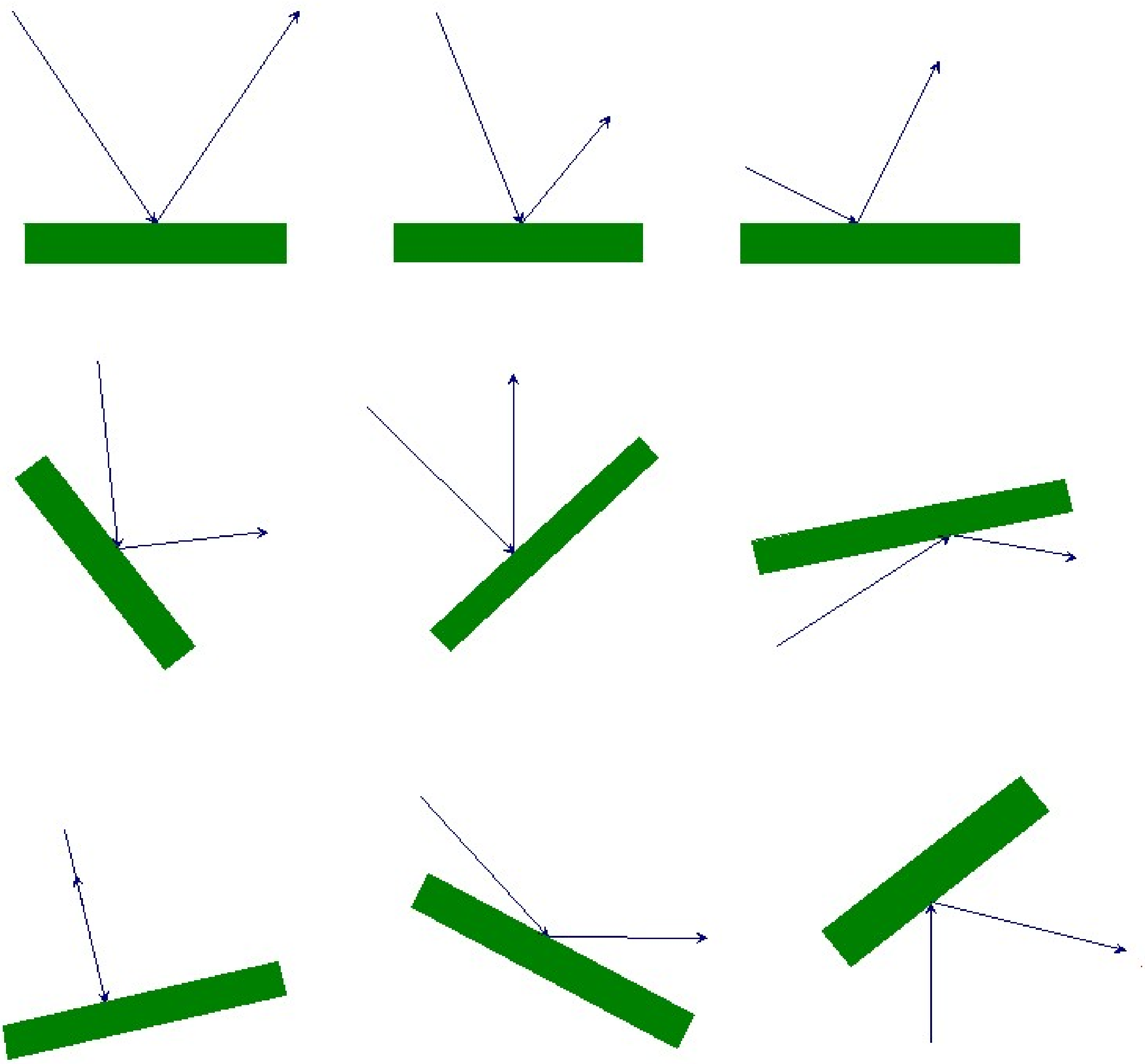
Proposition de problème par des élèves de CM2 :

Leçons sur les angles :

A l’époque (vers l’an 2000), les angles au CM2 sont étudiés à l’aide de gabarits ; on les compare, on les duplique, on les partage (joli travail sur ce qu’est une grandeur).

A la troisième séance, ils sont venus avec un gabarit et la question suivante : ce gabarit peut-il être une trajectoire de billard ? Ils ont vite trouvé qu’il fallait le mettre « comme ça ». On a fini par le plier en 2, mettre l’équerre contre une bande et le pli, et déplier. On a revu perpendiculaire, on a appris axe de symétrie d’un angle, bissectrice.

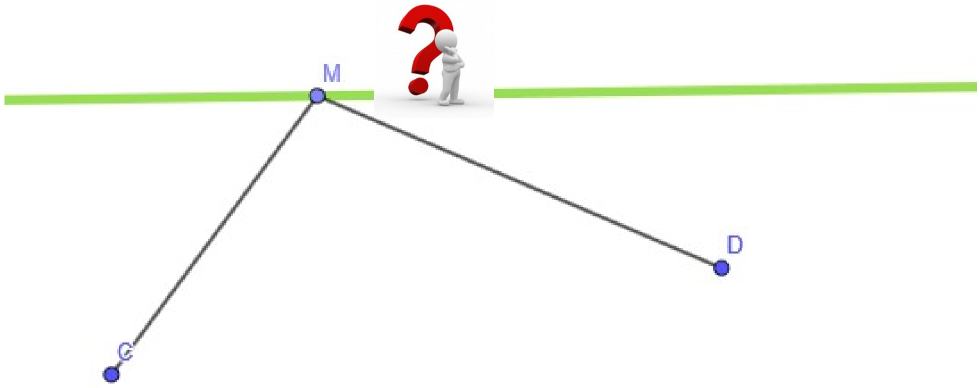
Dans notre premier Maths et Billard, on avait proposé la fiche suivante :

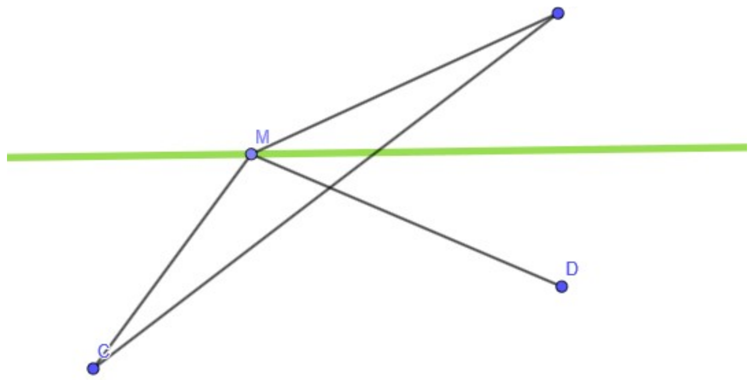


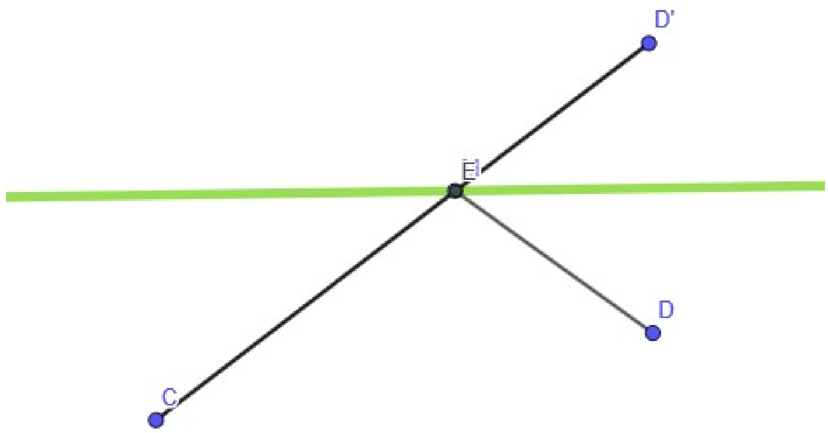
Ces trajets ressemblent-ils à des trajectoires de billard ?

# 8 Visée bande avant
# problème du jardinier

On place la bille en C et la quille en D. Quel point M faut-il viser pour que la bille fasse tomber la quille après un rebond ?



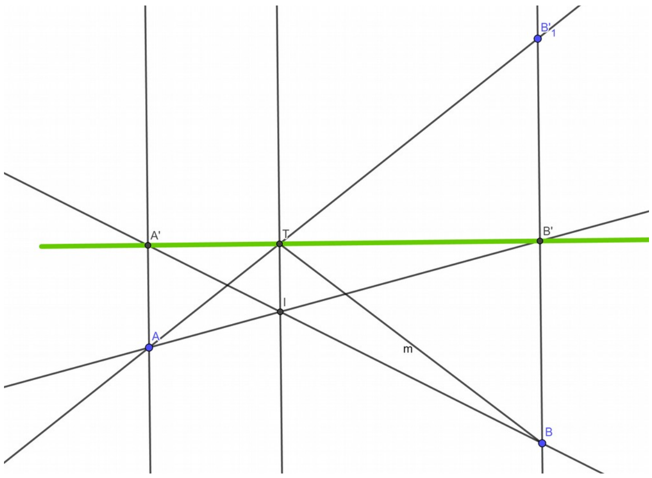




Problème du jardinier : un jardinier doit arroser ses salades ; il doit prendre le seau (point C), aller à la rivière (la bande) et aller à la salade (point D). Trouver le plus court chemin.

# 8 bis Bande avant par Willy Hope

Aller de A vers B par bande avant : tracer les perpendiculaires à la bande passant par A et B. Elles coupent cette bande en A' et B'.
Les droites A'B et AB' se coupent en I.
Le point T projeté orthogonal de I sur la bande est le point à viser pour réaliser la bande avant.




Les droites $(AA')$ et $(BB')$ sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{IA}{IB'} = \frac{IA'}{IB} = \frac{AA'}{BB'}$$

Soit $B''$ le symétrique de B par rapport à la bande. $(AB'')$ coupe $(A'B')$ en T.

On utilise à nouveau le théorème de Thalès :

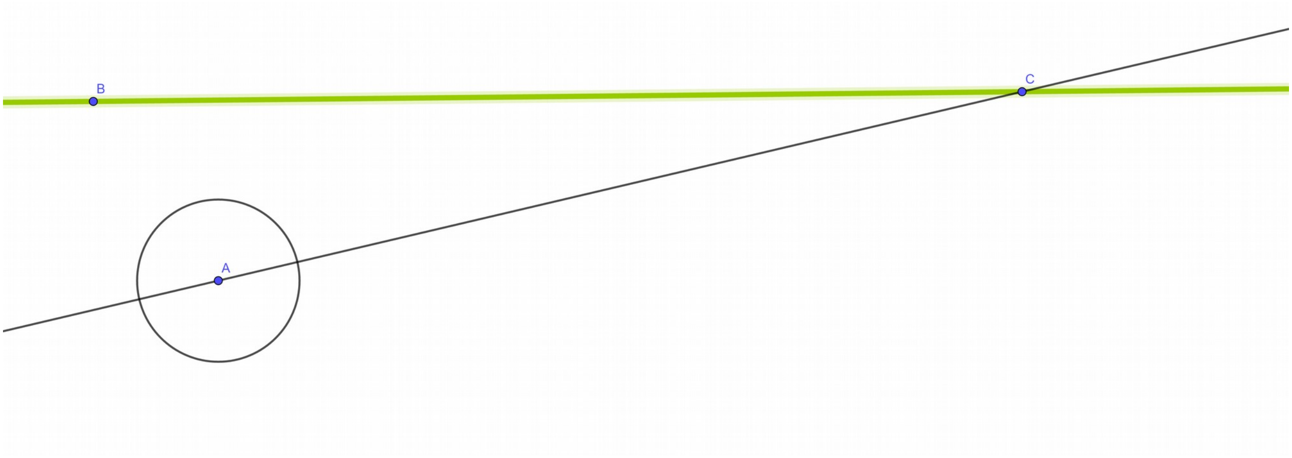
$$\frac{TA}{TB''} = \frac{TA'}{TB'} = \frac{AA'}{B'B''}$$

Puisque $B'B'' = BB'$, on en déduit que les six rapports sont égaux, et notamment $\frac{IA'}{IB} = \frac{TA'}{TB'}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites $(IT)$ et $(BB')$ sont parallèles, et donc, $(IT)$ et $(A'B')$ sont perpendiculaires.

Le point T est bien le projeté orthogonal de I sur la bande, et, d'après les constructions de $B''$ et de T, c'est bien le point du plus court trajet demandé.

# 9 Incidence rasante

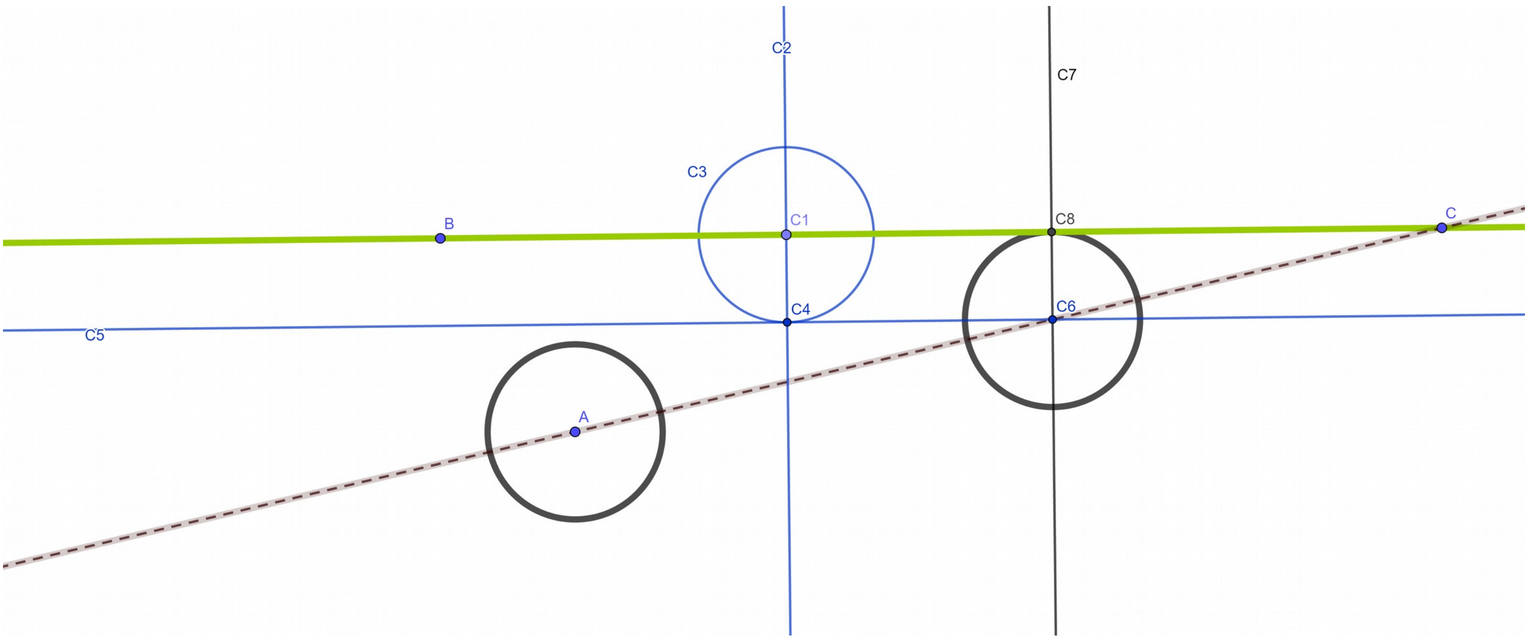



On vise un point C sur la bande BC ; dessiner la bille au moment du contact

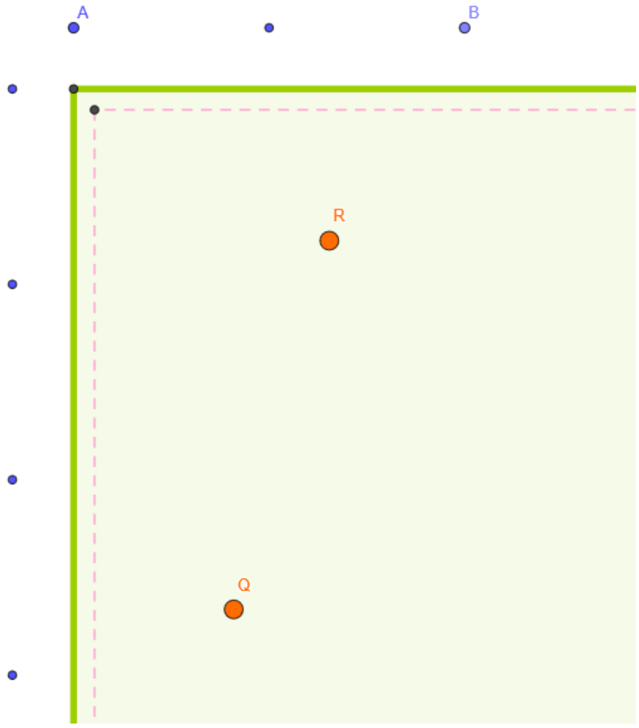
Le coin du prof :

Distance d'un point à une droite.

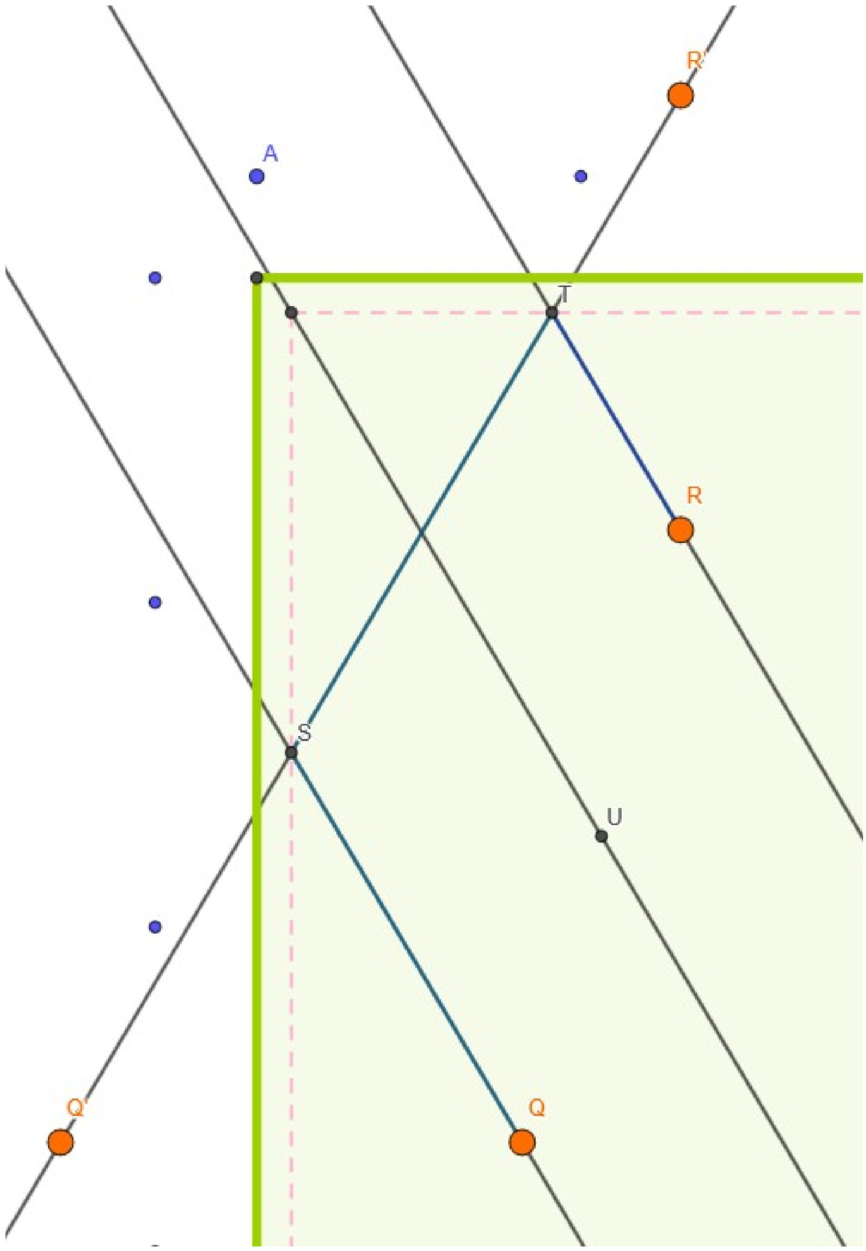
Cercle tangent à une droite



# 10
## Deux bandes avant




A partir du point R, atteindre le point Q après avoir touché deux bandes




Tracer les symétriques R' et Q' par rapport aux droites pointillées

La droite Q'R' coupe les pointillés en S et T.

Le centre de la bille parcourt la ligne brisée RTSQ

On appelle O le milieu de RQ
La droite Ocoin est parallèles aux droites RT et QS. D'où une méthode utilisée par des joueurs pour réaliser deux BA

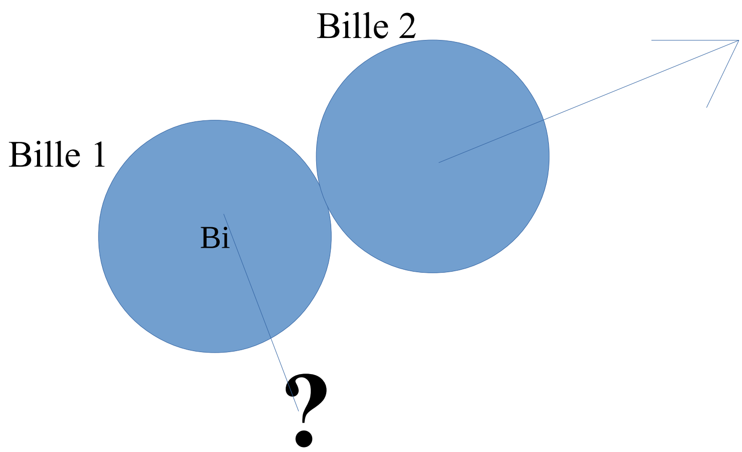
# 11

# Bille à bille

Position du problème :

On connaît le trajet d'une bille qui ne rencontre que des bandes.
Maintenant notre bille rencontre une autre bille : elle la carambole.
Le problème est de définir les trajectoires des deux billes après le choc.

Trajet de la bille choquée : sans exception, elle suit la direction de la droite des centres au moment du choc (plus précisément, au moment de la séparation des 2 billes).

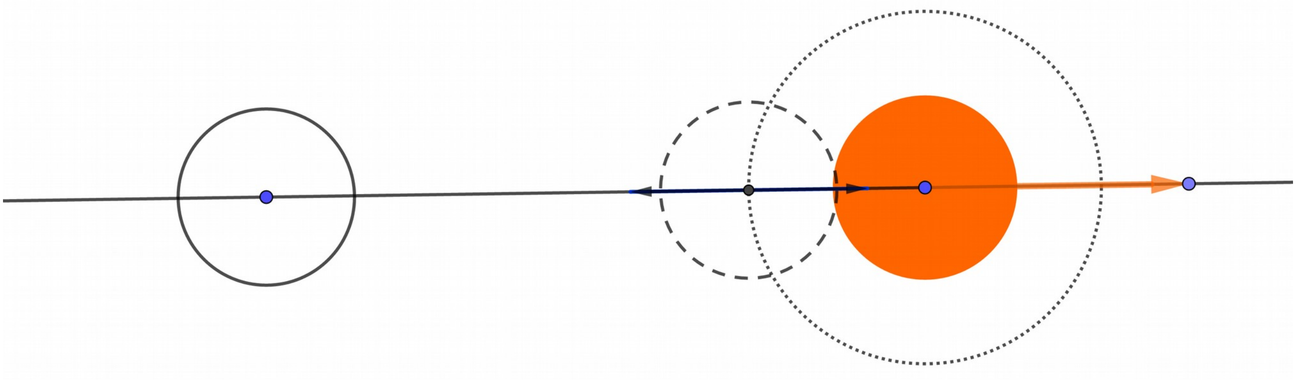



Pour la bille 2, c'est plus compliqué :
Juste après le choc (au moment de la séparation), la bille 2 suit une trajectoire perpendiculaire à la droite des centres. Ensuite, la trajectoire fera une parabole dont la courbure dépend de l'état de roulement de la bille 1 au moment du choc ; si la bille est en état de glissement, la parabole se réduit à une droite.
Si la bille roule, elle fera donc une courbe juste après le choc, puis sa trajectoire se réduira à une droite. C'est cette droite que nous utiliserons pour définir l'angle de déviation, l'autre côté de cet angle étant la droite de visée.
Cet angle de déviation dépend de ce qu'on appelle la quantité de bille, c'est à dire si la bille 1 choque plus ou moins la bille 2 , entre le « en plein » et le frôlement, qu'on appellera la « finesse ».

On utilise en gros : le plein, la finesse, le demi-bille, le 3/4 de bille et le 1/4 de bille (pour définir ces notions, voir plus loin *Le demi-bille*)

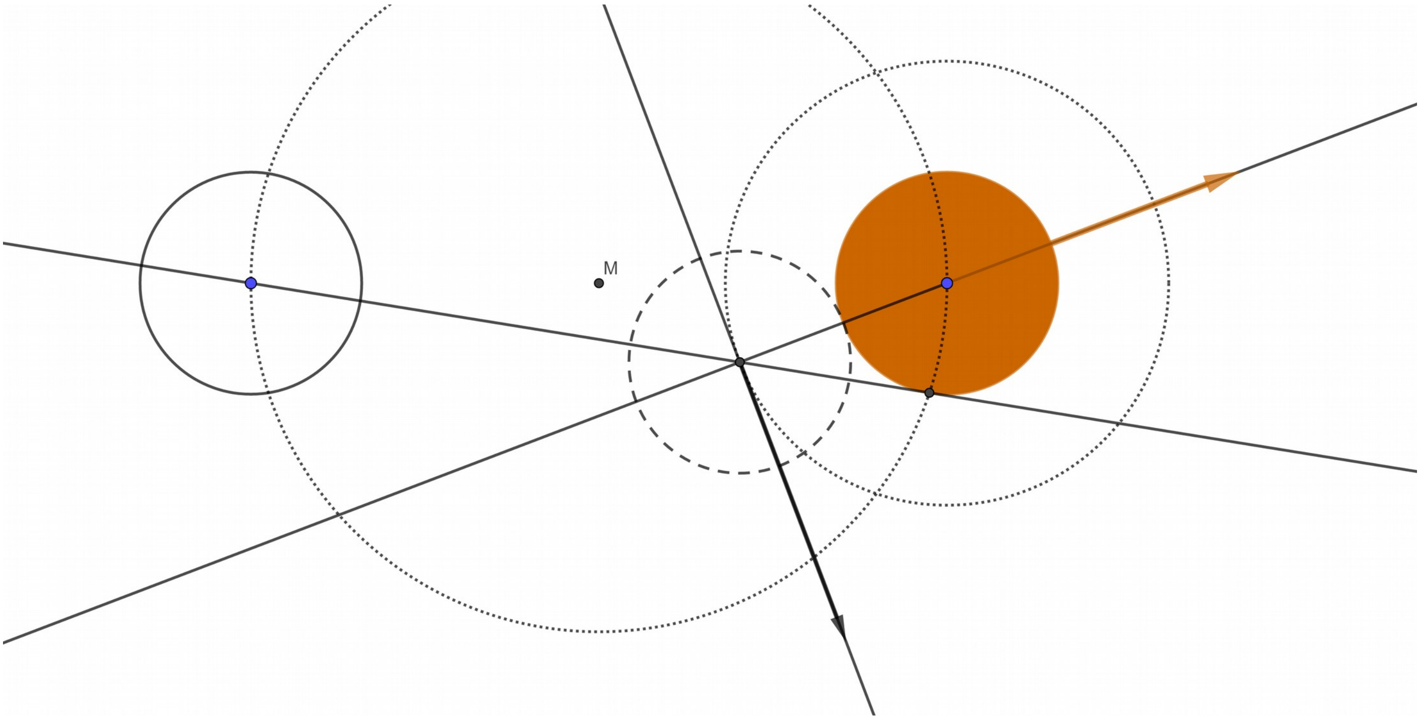
Exercice : construire les ces quantités de bille et les trajectoires associées des 2 billes.
On négligera les courbes qui se produisent.

**Visée pleine bille :**



Pour plus d'informatio sur le « pleine bille », on peut consulter
https://pod.univ-lille.fr/video/1625-choc-frontal-entre-2-billes-de-billard-partage-des-energies-et-direction-des-billes/

**Visée  demi-bille :**

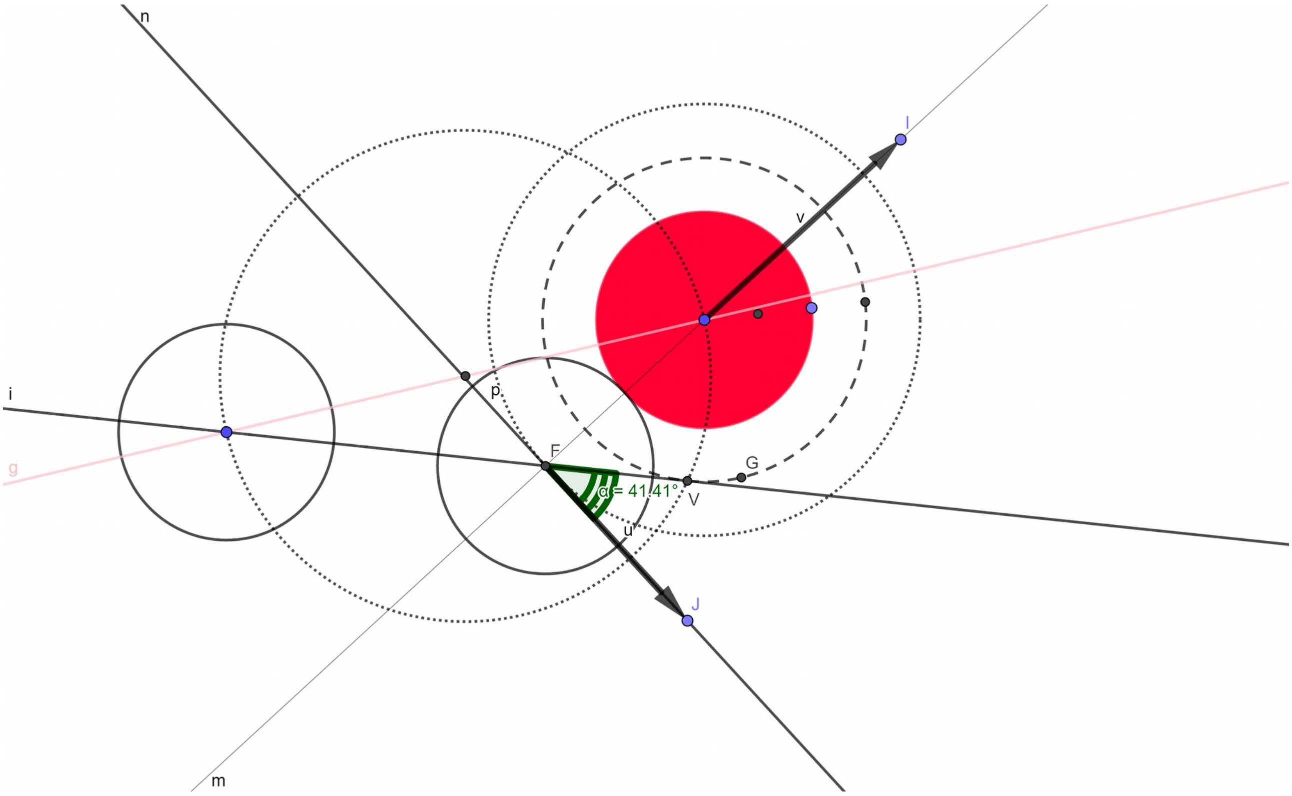



on appelle demi-bille la quantité de bille obtenue de la manière suivante : la bille 1 éclipse  la  moitié de la bille 2 (on définit de même le quart de bille quand la bille 1 éclipse le quart de la 2 ; de même 3/4 de bille) . Cette éclipse s'obtient lorsque la droite de visée est tangente à la bille 2. Il faut donc construire la tangente à un cercle (la bille 2)  passant par un point (le centre de la bille 1).
Le dessin ci-dessus illustre un choc avec la bille 1 en état de glissement au moment du choc.

**Visée quart de bille**

Dessiner les billes avant et après un choc « quart de bille ».

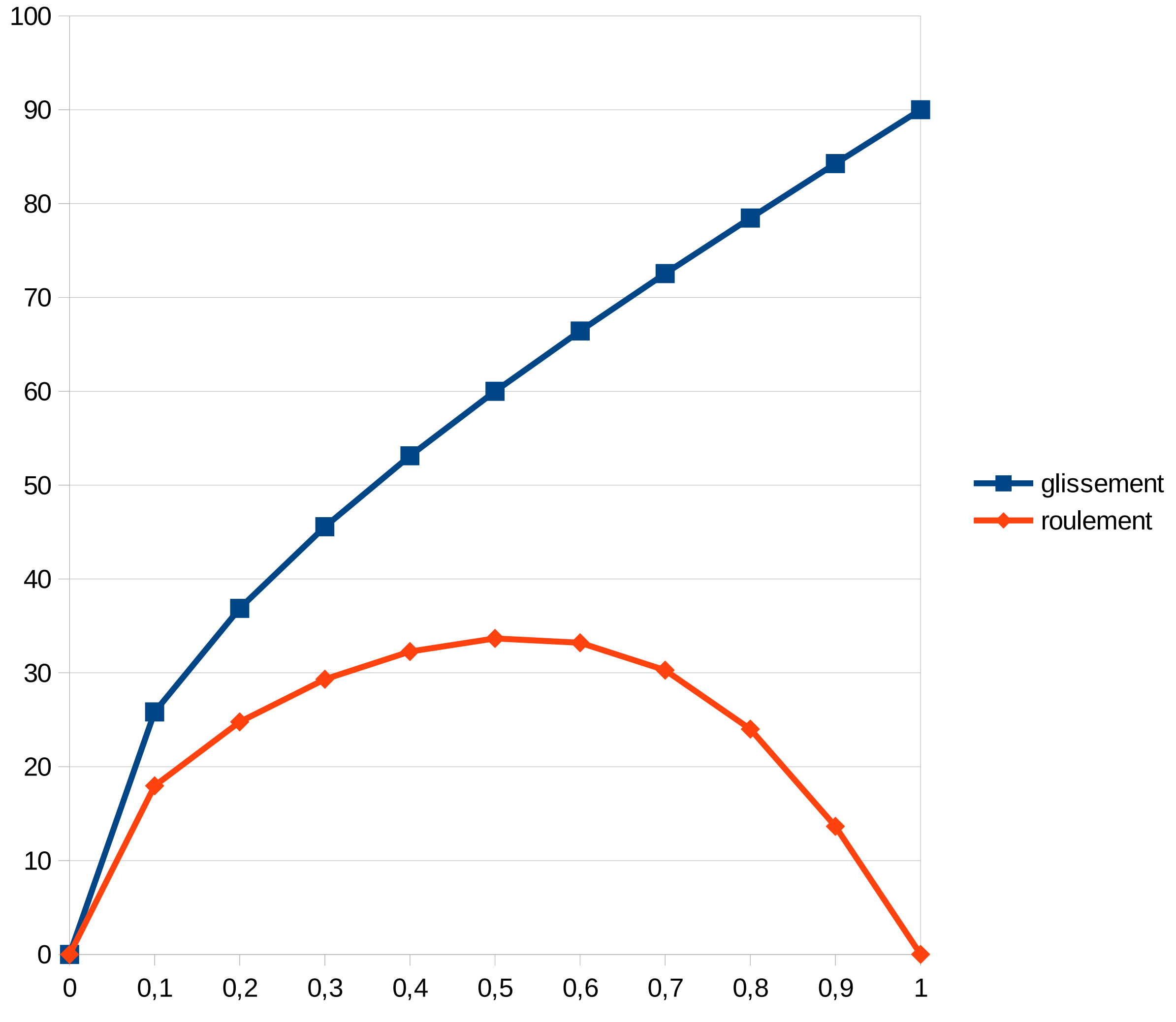
Pour viser quart de bille, il faut que la bille 1 éclipse le quart de la bille 2. Donc la visée doit être tangente à une bille fictive de rayon 1,5 rayon de bille.
En s'inspirant de la construction demi-bille, on fait la construction précédente en remplaçant la bille 2 par une « bille » de rayon 1,5.



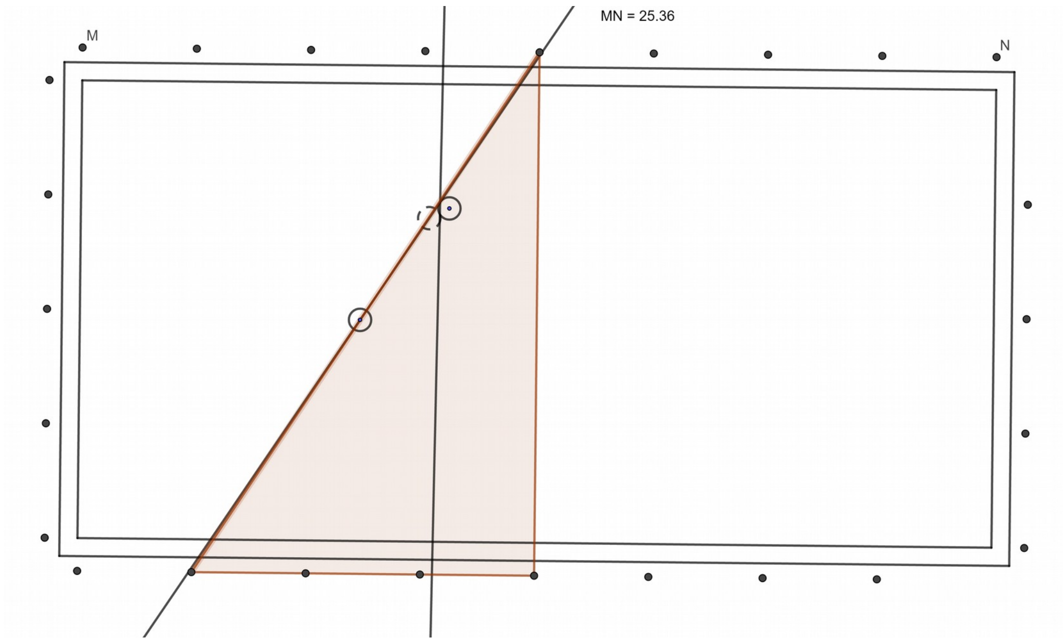

FJ est la trajectoire de la bille 1 en état de glissement après le choc.

## Les déviations :

| Quantité | dev initiale (rad) | dev initiale (deg) | tg(alpha) | alpha |
|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,45 | 26 | 0,3242156239 | 18,0 |
| 0,2 | 0,64 | 37 | 0,4615384615 | 24,8 |
| 0,3 | 0,80 | 46 | 0,561685382 | 29,3 |
| 0,4 | 0,93 | 53 | 0,6315789474 | 32,3 |
| 0,5 | 1,05 | 60 | 0,6661733875 | 33,7 |
| 0,6 | 1,16 | 66 | 0,6546536707 | 33,2 |
| 0,7 | 1,27 | 73 | 0,584044409 | 30,3 |
| 0,8 | 1,37 | 78 | 0,4453617714 | 24,0 |
| 0,9 | 1,47 | 84 | 0,2426798627 | 13,6 |
| 1 | 1,57 | 90 | -8,7287E-15 | 0,0 |



## **12** : **Point par une bande après le choc sur une bille :**




Trouver le trajet d'une bille qui carambole une bille puis rebondit sur une grande bande (préciser le point de contact de cette bille sur la deuxième bande rencontrée).
Le triangle rose a pour côtes 3 mouches (grande bandes), un peu plus de 4 mouches (petite bande). L’hypoténuse est la droite de visée. La visée est demi-bille (la bille 1 sur cette hypoténuse, la bille 2 est tangente). Dans ces conditions, la trajectoire après le choc est perpendiculaire à la grande bande.

Deux manières de considérer cette expérience :
- ou bien on admet que le rejet est bien de 33,7° (voir tableau)
- ou bien on se range à l’avis des bien pensants du billard et l’accord est loin d’être réalisé (la majorité tend tend vers 37°).

Notre dessin correspond à la première thèse : un peu de trigo et la connaissance des longueurs des côtés du triangle rectangle donnent des angles aigus de 33° et 57° environ (à 0,5° près). La connaissance des angles correspondants et alternes-internes prouve que la déviation après le choc est de 33°. De nombreuses expériences me confortent dans cette dernière hypothèse ; par exemple lors de la
(téléchargeable) .

Conférence enjouée interactive - Soirée Maths et Billard ou ...
où un grand débutant joue demi-bille avec un biais de 3 mouches et réalise le point avec la bille 3 sur la perpendiculaire à la bande menée à partir du centre de la bille 1 au moment du choc.