

OMBRE D'UN TRIANGLE

Énoncé

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B et S de coordonnées respectives $(3; 0; 0)$, $(0; 4; 0)$ et $(0; 0; 5)$. C désigne un point de l'espace tel que ABC soit un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse $[AB]$.

On assimile le triangle ABC à une plaque opaque triangulaire pivotant autour de l'axe (AB) et le point S à une source lumineuse. L'objectif est de déterminer la position du triangle donnant une ombre sur le plan (Oxy) d'aire maximale.

1. Réaliser à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique une figure permettant de visualiser les éléments décrits. En particulier, on précisera la courbe de l'espace sur laquelle se trouve le point C et on fera apparaître l'ombre du triangle ABC hachurée ou en couleur. Utiliser le logiciel pour obtenir une réponse au problème posé.

Appeler l'examineur pour vérification de la figure construite.

2. On note P le point d'intersection de la droite (SC) avec le plan (Oxy) , H le milieu de $[AB]$ et \vec{n} le vecteur de coordonnées $(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; 0)$. Que représente le vecteur \vec{n} pour la droite (AB) ? On notera t une mesure de l'angle orienté $(\vec{n}; \overrightarrow{HC})$ et on se limitera à $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Exprimer le vecteur \overrightarrow{HC} comme combinaison linéaire des vecteurs \vec{n} et \vec{k} . Déterminer alors les coordonnées de C et P en fonction de t .

Appeler l'examineur pour vérification.

3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, évaluer en fonction de t la distance $\varphi(t)$ de P à la droite (AB) , déterminer la dérivée de cette fonction φ , ses variations. Vérifier qu'elle admet un maximum sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. Indiquer la valeur fournie par le logiciel pour ce maximum. En déduire l'aire maximale de l'ombre du triangle ABC , comparer ce résultat avec celui obtenu avec le logiciel de géométrie dynamique. Donner aussi la valeur de t correspondante.

Appeler l'examineur pour vérification.

Pierre Lapôtre, Lycée S. Berthelot, Calais

Groupe AMECMI