

Approximants de Padé

M.Gouy

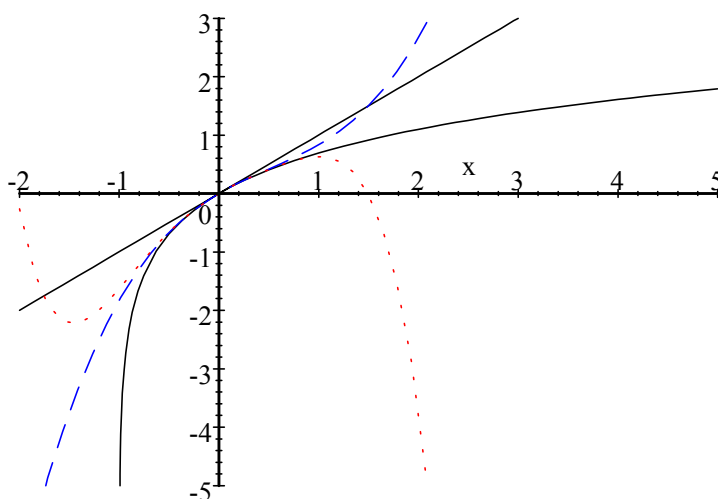
G.Huvent

A. Ladureau

29 juin 2002

1 Position du problème

Soit f une fonction de classe C^∞ au voisinage de zéro, on dit qu'elle admet un développement limité à l'ordre n s'il existe un polynôme P de degré au plus n tel que $f(x) - P(x) = o_0(x^n)$. Le polynôme P est parfois appelé polynôme de Taylor de f à l'ordre n . Il fournit une approximation locale de f . On peut regarder expérimentalement la qualité de l'approximation de f par son polynôme de Taylor. Dans le cas des fonctions usuelles ($\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\ln(1+x)$, $\exp(x)$, $\sqrt{1+x}$), on constate que l'approximation semble de plus en plus fine lorsque le degré augmente, mais parfois sur un domaine limité. C'est en substance la notion de fonction développable en série entière (cf graphe ci dessous où l'on constate que pour $x \mapsto \ln(1+x)$, le polynôme de Taylor donne une bonne approximation sur $] -1, 1[$)



La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$

Si l'on désire généraliser la notion de développement limité, il semble légitime de remplacer le polynôme P par une fraction rationnelle F . On définit ainsi la notion d'approximant de Padé.

Définition 1 Soit f de classe C^∞ sur un intervalle contenant 0. On dit que $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ est **un**¹ $[p/q]$ approximant de Padé de f s²

$$\begin{aligned} \deg P &\leq p, \quad \deg Q \leq q \\ Q(0) &= 1 \\ f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} &= o(x^{p+q}) \end{aligned}$$

¹Le problème de l'unicité ne sera pas abordé.

²Certains auteurs imposent à un padé $[p/q]$ d'avoir un numérateur de degré p exactement et un dénominateur de degré q exactement.

Si $p = q$, l'approximant est dit diagonal. On s'intéresse essentiellement à ces approximants. On note $[p/q]_f$ le $[p/q]$ approximant de Padé de f .

Exemple 2 Un Padé $[1/1]$ de $\exp(x)$ est une fraction rationnelle de la forme $\frac{a+bx}{1+cx}$ telle que

$$e^x - \frac{a+bx}{1+cx} = o(x^2)$$

2 Calcul de quelques approximants de Padé, l'approche naïve

La première méthode consiste à calculer, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, un développement limité de

$$f(x) - \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_px^p}{1 + b_0x + \dots + b_qx^q}$$

puis à résoudre le système obtenu en imposant aux coefficients de $1, x, \dots, x^{p+q}$ d'être nuls.

Exercice 3 Calculer par cette méthode les Padé

$$[1/1] \text{ de } \exp(x)$$

$$[1, 2] \text{ de } \sin(x)$$

Tracer les courbes représentatives des Padé et de la fonction initiale.

Exercice 4 Calculer le Padé $[3/3]$ de $\ln(1+x)$ par cette méthode.

3 Quelques propriétés

Exercice 5 Calculer les Padé $[1/1]$ de $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ qu'en pensez vous ?

Exercice 6 Calculer les Padé $[2/2]$ de e^x et e^{-x} qu'en pensez vous ?

Exercice 7 Calculer les Padé $[2/2]$ et $[3, 3]$ de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

Conclusion : Quelles propriétés des approximants de Padé peut-on conjecturer.

4 Réfléchir avant d'agir.

La première méthode exposée consistait à faire "brutalement" un développement limité de $f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)}$. Elle conduit à la résolution de système qui ont un défaut (lequel). Ce défaut s'avère rapidement un véritable handicap, si vous n'êtes pas convaincu, faites l'exercice suivant :

Exercice 8 Calculer par cette méthode le Padé $[7/7]$ de $\sin(x)$

Conclusion : Avez vous une idée pour obtenir des systèmes linéaires ?

(Re) faire l'exercice précédent avec votre méthode et comparer.

5 Une bonne approximation de la tangente

5.1 Le Padé $[4/4]$

Exercice 9 Déterminer le Padé $[4/4]$ de $\tan(x)$. On le notera $F(x)$.

D'après vous, pour calculer $\tan(x)$, est-il vrai qu'il suffit d'en avoir une "bonne approximation" sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. (sachant que les additions, multiplications et calculs d'inverse sont des opérations qui coûtent peu en temps machine).

Tracer la différence entre l'approximant F et la fonction \tan sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

5.2 Une autre approximation

On constate expérimentalement (mais est-ce une surprise) que plus x est proche de 0, meilleure est l'approximation. On introduit la fonction

$$G(x) = \frac{2F\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - F^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Quel est l'intérêt de cette fonction ? Déterminer un développement limité de $G(x) - \tan(x)$ à un ordre que vous aurez choisi. Tracer la fonction $G - \tan$.

Note Historique



Henri Padé

Henri Eugène Padé est né à Abbeville le 17 décembre 1863. Il fait ses études à Abbeville, Lille (où il obtient son baccalauréat) puis au lycée St Louis à Paris. Il est admis à l'Ecole Normale en 1883 (ainsi qu'à l'X). Il enseigne les Mathématiques Élémentaires à Limoges, Carcassonne, Montpellier avant de partir étudier à Göttingen en 1890 où ses professeurs sont Felix Klein³ et Hermann Schwarz) Il revient en France, est nommé à Poitiers, puis à Lyon. Il soutient sa thèse "Sur les représentations approchées d'une fonction par des fractions rationnelles " en 1892. D'octobre 1893 à janvier 1897, il est professeur au Lycée Faidherbe de Lille où il est très apprécié, il est ensuite chargé de conférences à la Faculté des Sciences de Lille et est nommé Maître de Conférences en remplacement d'Emile Borel. Il est ensuite affecté successivement à Poitiers (Professeur de Mécaniques à la Faculté), Bordeaux (Doyen), Besançon, Dijon, Aix (Recteur). Il décède le 31 décembre 1933. Sa carrière est jalonnée de prix et de récompenses mathématiques.

Il faut signaler que Euler avait découvert les approximants de Padé dès 1751, mais n'en avait compris ni l'importance ni les propriétés essentielles.

³Padé traduit à cette occasion le programme d'Erlangen en français.

Quelques résultats

1 La bonne approche pour un calcul effectif

1.1 Etude théorique

Le problème soulevé par l'approche naïve des approximants de Padé est la non linéarité des systèmes obtenus.

On remédie à ce défaut ainsi :

Si

$$f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} = x^n \varepsilon(x)$$

$$\varepsilon(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

et si

$$Q(0) = 1$$

alors

$$f(x)Q(x) - P(x) = x^n \varepsilon(x)Q(x) = x^n \varepsilon_1(x) = o(x^n)$$

Il suffit donc de faire un développement limité de $f(x)$ à l'ordre n de la fonction $f(x)Q(x) - P(x)$.

On obtient alors un système linéaire.

En effet si

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{p+q}x^{p+q} + o(x^{p+q})$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_px^p$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_qx^q \text{ avec } b_0 = 1$$

alors

$$f(x)Q(x) - P(x) = c_0b_0 - \mathbf{a}_0$$

$$+ (c_1b_0 + c_0b_1 - \mathbf{a}_1)x$$

$$+ (c_2b_0 + c_1b_1 + c_0b_2 - \mathbf{a}_2)x^2$$

$$+ \dots$$

$$+ (c_pb_0 + c_{p-1}b_1 + \dots + c_{p-q}b_q - \mathbf{a}_p)x^p$$

$$+ (c_{p+1}b_0 + c_pb_1 + \dots + c_{p+1-q}b_q)x^{p+1}$$

$$+ \dots$$

$$+ (c_{p+q}b_0 + c_{p+q-1}b_1 + \dots + c_pb_q)x^{p+q}$$

$$+ o(x^{p+q})$$

avec la convention que

$$c_i = 0 \text{ si } i < 0$$

On a donc deux systèmes linéaires (compte tenu de $b_0 = 1$)

$$\begin{pmatrix} c_{p-q+1} & c_{p+q-2} & \cdots & & & c_p \\ c_{p-q+2} & c_{p+q-3} & \cdots & \cdots & & c_{p+1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ c_p & c_{p+1} & & \cdots & c_{p+q-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_q \\ b_{q-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{p+1} \\ c_{p+2} \\ \vdots \\ c_{p+q} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & \cdots & & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ c_p & \cdots & & \cdots & c_{p-q} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

La résolution du premier système donne les valeurs des $(b_i)_i$ que l'on injecte dans le second système pour obtenir les $(a_i)_i$.

Un **condition suffisante** d'existence et d'unicité de l'approximant de Padé est la non nullité du déterminant, dit de Hankel

$$H_{p,q}(f) = \begin{vmatrix} c_{p-q+1} & c_{p-q+2} & \cdots & & c_p \\ c_{p-q+2} & c_{p-q+3} & \cdots & \cdots & c_{p+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_p & c_{p+1} & & \cdots & c_{p+q-1} \end{vmatrix}$$

Remarque 10 Ce déterminant est de taille q .

Si cette condition est réalisée l'**approximant** $[p/q]$ est **unique**, mais rien ne permet d'affirmer que le numérateur est bien de degré p et le dénominateur de degré q .

1.2 Cas des fonctions paires

Si f est paire et de classe C^∞ , on peut affirmer que $c_{2p+1} = \frac{f^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} = 0$. Dans ce cas, dans le déterminant de Hankel, un terme sur deux est nul. On peut établir que si p et q sont impairs alors ce déterminant est nul.

En effet supposons que p et q soient impairs. Le terme d'indice (i, j) du déterminant de Hankel est alors $c_{p-q+i+j-1}$. L'indice $p - q + i + j - 1$ a la parité de $i + j - 1$, d'où $c_{p-q+i+j-1}$ est nul si et seulement si $i + j$ est **pair**.

Le déterminant de Hankel est alors de la forme

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & ? & 0 & \dots \\ ? & 0 & ? & \dots \\ 0 & ? & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}_{q \text{ colonnes}}$$

On constate que les $\frac{q+1}{2}$ colonnes de rang impair sont combinaisons linéaires des $\frac{q-1}{2}$ colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ où

tous les coefficients sont nuls sauf un, d'indice de ligne pair. On a donc $\frac{q-1}{2} + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $\frac{q-1}{2}$. Les colonnes de rang impair sont liées.

Si l'on désire une démonstration plus rigoureuse, on rappelle la définition théorique du déterminant

$$A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq q}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_q} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$$

Pour établir que $\det H_{p,q} = 0$, il suffit de prouver que pour toute permutation σ de $\{1, \dots, q\}$, un des termes $\sigma(i) + i$ est pair⁴.

Par l'absurde, dans le cas contraire, $\forall i, \sigma(i) + i = 2n_i + 1$. Mais alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \sigma(i) + i &= q + 2 \sum_{i=1}^q n_i \\ \parallel \\ 2 \sum_{i=1}^q i &= q(q+1) \end{aligned}$$

La contradiction provient du fait que $q(q+1)$ est pair alors que $q + 2 \sum_{i=1}^q n_i$ est de la parité de q donc impair. Cela permet d'affirmer que pour les fonctions paires, les Padé $[2p + 1/2p + 1]$, s'ils existent ne sont pas uniques.

Exemple 11 Pour la fonction \cos , si l'on cherche à calculer le Padé $[3/3]$, le déterminant de Hankel est nul. Il n'y a pas de solution au système (1)

Remarque 12 Le logiciel Maple dispose d'une procédure **padé** qui calcule les approximants de Padé. Cette procédure donne comme Padé $[3/3]$ de \cos la fraction $\frac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 + \frac{1}{12}x^2}$ (qui est le Padé $[2/2]$). Cependant

$$\cos(x) - \frac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 + \frac{1}{12}x^2} = \frac{1}{480}x^6 + o(x^6)$$

ce qui n'est pas un $o(x^6)$.

L'explication est simple, un approximant de Padé est défini, pour Maple, comme une fraction rationnelle $\frac{N(x)}{D(x)}$ avec $\deg N \leq p, \deg D \leq q$ et $f(x) - \frac{N(x)}{D(x)}$ est un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible.

En d'autres termes, Maple calcule la fraction rationnelle qui approche, localement, le mieux la fonction f .

1.3 Un exemple de fonction impaire, le sinus

Prenons $f(x) = \sin(x)$ et calculons $H_{2,2}(\sin)$, on obtient

$$H_{2,2}(\sin) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

qui est inversible d'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Le Padé $[2/2]$ du sinus existe donc. D'après les formules établie ci dessus

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁴Cela se comprend bien, en effet pour que $i + \sigma(i)$ soit toujours impair, il faut associer à i pair une valeur $\sigma(i)$ impaire. Mais dans $\{1, \dots, q\}$ où q est impair, il y a $\frac{n+1}{2}$ nombres impairs et $\frac{n-1}{2}$ nombres pairs. On aura bien du mal à toujours "marier" un pair avec un impair!

Le Padé [2/2] est donc

$$\frac{x}{1 + \frac{x^2}{6}}$$

On peut vérifier que

$$\sin(x) - \frac{x}{1 + \frac{x^2}{6}} = -\frac{7}{360}x^5 + o_0(x^5) = o_0(x^4)$$

2 Quelques propriétés

Vous avez constaté que les approximants de Padé de $\sqrt{1+x}$ et de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sont liés. Plus généralement on a la proposition suivante.

Proposition 13 Soit f de classe C^∞ , si $f(0) \neq 0$ on pose $g = \frac{1}{f}$.

On suppose qu'il existe un approximant $[p/q]$ de f alors

$$[p/q]_g = \frac{1}{[p/q]_f}$$

est un approximant $[p/q]$ de g .

En d'autres termes :

Les approximants de Padé de deux fonctions inverses l'une de l'autre sont aussi inverses l'un de l'autre.

Preuve. Si $[p/q]_f = \frac{P}{Q}$ alors

$$Q(x)f(x) - P(x) = x^{p+q}\varepsilon(x)$$

En multipliant par g , on a

$$Q(x) - P(x)g(x) = x^{p+q}\varepsilon(x)f(x) = x^{p+q}\varepsilon_1(x)$$

■

Ce résultat appliqué à l'exponentielle et compte tenu de $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ prouve que les approximants diagonaux de la fonction exponentielle⁵ sont de la forme $\frac{P(x)}{P(-x)}$.

Le problème de la parité des approximants de padé peut être abordé. En effet, on a le résultat suivant.

Proposition 14 Soit f de classe C^∞ , on suppose que l'approximant $[p/q]_f$ existe et est **unique** (ce qui est toujours le cas si le déterminant de Hankel n'est pas nul) alors il a la même parité (éventuelle) que f .

Preuve. Si f est paire par exemple. Supposons que $f(x)Q(x) - P(x) = x^{p+q}\varepsilon(x)$ alors

$$f(x)Q(-x) - P(-x) = x^{p+q}(-1)^{p+q}\varepsilon(-x) = x^{p+q}\varepsilon_1(x) = o_0(x^{p+q})$$

Par unicité, on a $P(-x) = P(x)$ et $Q(-x) = Q(x)$. ■

Ce dernier résultat permet de simplifier les calculs.

⁵On peut les déterminer explicitement. Voir par exemple [Duverney]

3 A propos de la fonction tangente : l’algorithme Boustrophédon⁶

La fonction tangente est, à notre avis, un bon exemple pour illustrer les approximants de Padé. Elle offre, au niveau pédagogique, un second intérêt.

En effet, on peut se poser le problème du calcul effectif des coefficients de son développement limité (problème qui ne se pose pas pour les fonctions usuelles comme $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sqrt{1+x}$, ...).

Le calcul rapide et efficace des termes du développement limité de la fonction tangente repose sur une idée simple : Une équation différentielle donne des informations, non seulement sur la fonction, mais aussi sur ses dérivées. L’équation différentielle de la tangente est bien connue

$$\begin{aligned} \text{Si } f(x) &= \tan(x) \text{ alors} \\ f'(x) &= 1 + f^2(x) \end{aligned}$$

Si l’on dérive n fois cette égalité, par la formule de Leibniz on obtient

$$\begin{aligned} \text{Si } n &\geq 1, & (2) \\ f^{(n+1)}(x) &= (f(x) \times f(x))^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \frac{f^{(n-k)}(x)}{(n-k)!} & (3) \end{aligned}$$

Le développement limité donné par la formule de Taylor-Young est

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2} + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(x^n)$$

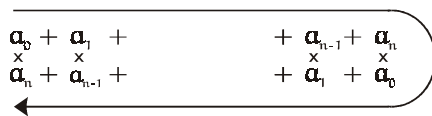
On pose

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

l’égalité (2) donne

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$$

Le dessin suivant explique le terme Boustrophédon



$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \dots + a_n a_0)$$

Exemple 15 Il est clair (imparité) que $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = 0$. Puis $a_1 = 1$ ($f'(0) = 1$). Ensuite

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \times & \times & \times & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} (0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

⁶Boustrophédon signifie, "à la manière d’un sillon tracé par un boeuf". On utilise ce terme pour désigner une "écriture dont les lignes vont sans interruption de gauche à droite et de droite à gauche" (PETIT ROBERT).

$$\begin{aligned}
 a_5 &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & & \\ \times & & & & \times & \downarrow & \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & & \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15} \\
 a_7 &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{15} & 0 & & \\ \times & & & & \times & & \times & \downarrow & \\ 0 & \frac{2}{15} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & & \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{7} \times \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{9} \right) = \frac{17}{315}
 \end{aligned}$$

Remarque 16 On peut exprimer les coefficients a_k à l'aide des nombres de Bernoulli, mais c'est une autre histoire ...

4 Les approximants de Padé de la fonction tangente (seconde approche)

L'algorithme Boustrophédon donne une méthode efficace pour calculer le développement limité de la fonction tangente. Mais, si l'on y réfléchit un peu, il est inutile pour la détermination des approximants de Padé. En effet

$$\tan(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} = o_0(x^{p+q}) \Leftrightarrow Q(x) \sin(x) - P(x) \cos(x) = o_0(x^{p+q})$$

Il suffit donc, en pratique, de déterminer le développement limité de $Q(x) \sin(x) - P(x) \cos(x)$, ce qui s'avère bien plus simple.

Si l'on regarde en détail les calculs, on obtient

$$\begin{aligned}
 &(b_0 + b_1x + \dots + b_qx^q) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) - (a_0 + a_1x + \dots + a_px^p) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \\
 &= -a_0 + (b_0 - a_1)x + \left(b_1 - a_2 + \frac{1}{2}a_0 \right) x^2 + \dots
 \end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement (compte tenu de $b_0 = 1$)

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_1 &= 1
 \end{aligned}$$

et on peut écrire que

$$(a_2x^2 + \dots + a_px^p) \cos(x) - (b_1x + \dots + b_qx^q) \sin(x) = \sin(x) - x \cos(x) + o_0(x^{p+q})$$

Afin d'avoir le même nombre de coefficients en (a_i) et (b_i) , on s'intéresse aux Padés $[n + 1/n]$. Le système obtenu est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & -1 & 0 & \\ -\frac{1}{2!} & 0 & 1 & & \frac{1}{3!} & 0 & -1 & \\ 0 & -\frac{1}{2!} & 0 & & 0 & \frac{1}{3!} & 0 & \\ \frac{1}{4!} & 0 & -\frac{1}{3!} & & -\frac{1}{5!} & 0 & \frac{1}{3!} & \\ 0 & \frac{1}{4!} & & \ddots & & -\frac{1}{5!} & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & & & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} \\ 0 \\ \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

On reconnaît en colonnes les développements limités de $\cos(x), x \cos(x) \dots$ puis $-\sin(x), -x \sin(x)$ et en second membre celui de $x \cos(x) - \sin(x)$.

Exemple 17 Pour le Padé $[3/2]$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{30} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{15} \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$[3/2]_{\tan} = \frac{x - \frac{x^3}{15}}{1 - \frac{2}{5}x^2}$$

4.1 Compléments

On peut aussi calculer par récurrence les approximants de Padé de la fonction \tan . La méthode proposée ici est un raccourci de celle de Lambert. Cette dernière fait appel aux fonctions de Bessel, elle est exposée dans [IREM-PADE]. On considère les fonctions

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt) dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} . La dérivabilité provient du théorème de dérivation sous le signe somme pour une intégrale sur un segment.

Le calcul de f'_n donne

$$f'_n(x) = -\frac{x^{2n+1}}{2^n n!} \int_0^1 t (1-t^2)^n \sin(xt) dt + \frac{(2n+1)x^{2n}}{2^n n!} \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt) dt$$

Une intégration par parties de f_{n+1} donne

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \frac{x^{2n+3}}{2^{n+1} (n+1)!} \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \cos(xt) dt \\ &= \frac{x^{2n+2}}{2^n (n)!} \int_0^1 t (1-t^2)^n \sin(xt) dt \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = -x f'_n(x) + (2n+1) f_n(x)$$

Le calcul des premières valeurs de f_n fournit

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x \int_0^1 \cos(xt) dt = \sin x \\ f_1(x) &= \sin(x) - x \cos(x) \\ f_2(x) &= (3-x^2) \sin(x) - 3x \cos(x) \end{aligned}$$

On montre par récurrence immédiate que

$$\begin{aligned} f_n(x) &= Q_n(x) \sin(x) - P_n(x) \cos(x) \\ P_n &\in \mathbb{Z}[X], \deg(P_n) = n \text{ si } n \text{ est impair, } n-1 \text{ sinon} \\ Q_n &\in \mathbb{Z}[X], \deg(Q_n) = n-1 \text{ si } n \text{ est impair, } n \text{ sinon} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= (2n+1)Q_n(x) - xP_n(x) - xQ'_n(x) \\ P_{n+1}(x) &= (2n+1)P_n(x) + xQ_n(x) - xP'_n(x) \end{aligned}$$

En majorant $\left| \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt) dt \right|$ par 1, on obtient l'inégalité

$$0 < |Q_n(x) \sin(x) - P_n(x) \cos(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} \tag{4}$$

ce qui prouve que

$$\left| \tan(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{2^n n! Q_n(x) \cos(x)} = x^{2n} \varepsilon(x)$$

et permet d'affirmer que

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \text{ est un approximant de Padé } [n/n] \text{ de la fonction } \tan$$

Remarque 18 En fait, si n est impair, on obtient un approximant $[n+1/n]$.

Remarque 19 Pour tout n , P_n est impair, Q_n est pair.

Remarque 20 L'inégalité (4) permet de prouver que si $x = \frac{p}{q} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors

$$0 < q^n \left| Q_n\left(\frac{p}{q}\right) \tan\left(\frac{p}{q}\right) - P_n\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq \frac{p^{2n+1}}{q^{n+1} 2^n n! \cos\left(\frac{p}{q}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Supposons que $\tan\left(\frac{p}{q}\right)$ soit rationnel, $\tan\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a}{b}$ alors

$$bq^n \left| Q_n\left(\frac{p}{q}\right) \tan\left(\frac{p}{q}\right) - P_n\left(\frac{p}{q}\right) \right| \text{ est un entier}$$

ce qui constitue une contradiction (il est non nul et majoré par un terme qui tend vers 0).

On prouve donc que si x est rationnel alors $\tan(x)$ ne l'est pas. En particulier avec $x = \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, par contraposition⁷, on en déduit que

$$\pi \text{ est un nombre irrationnel}$$

Remarque 21 On peut présenter cette étude de manière différente.

On définit la suite de fonctions $(u_n)_n$ par

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sin(x) \\ u_{n+1}(x) &= \int_0^x t u_n(t) dt \end{aligned}$$

On montre que

$$u_n(x) = R_n(x^2) \sin(x) - x S_n(x^2) \cos(x)$$

où R_n, S_n sont des polynômes à coefficients entiers de degré au plus n (en fait de degré inférieur à $\frac{n}{2}$).

Puis par récurrence que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |u_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

On établit ensuite la relation de récurrence suivante

$$u_{n+1}(x) = (2n+1)u_n(x) - x^2 u_{n-1}(x) \tag{5}$$

⁷La contraposé de $P \implies Q$ est $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$. Dans notre exemple, il s'agit de la proposition $\tan(x)$ rationnel implique x irrationnel.

En revanche $\tan(x)$ et x peuvent être tous les deux irrationnels (prendre $x = \frac{\pi}{6}$).

Si l'on suppose que $\pi^2 = \frac{p}{q}$, on obtient alors

$$\left| u_n \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| = \left| R_n \left(\frac{p}{q} \right) \right| \leq \frac{\pi^{2n}}{2^{3n}n!} = \frac{p^n}{2^{3n}n!q^n}$$

d'où

$$q^n R_n \left(\frac{p}{q} \right) \rightarrow 0$$

mais

$$q^n R_n \left(\frac{p}{q} \right) \in \mathbb{N}$$

cet entier est donc nul à partir d'un certain rang. On en déduit que $u_n \left(\frac{\pi}{2} \right)$ est nul à partir d'un certain rang et donc est toujours nul (d'après la relation 5). La contradiction provient de la non nullité de $f_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)$.

En conclusion

π^2 (et donc π) est un nombre irrationnel

On peut également prouver que

$$xu_n''(x) - 2nu_n'(x) + xu_n(x) = 0$$

et que

$$u_n(x) = f_n(x)$$

Références

[Duverney] D.DUVERNEY, *Théorie de Nombres*, Dunod, 1998

[IREM-PADE] C.BREZINSKI, M.HUTTNER, A.JUHEL, P.MOUSSA, J.VAN ISEGHEM, *Approximants de Padé*, Publications de l'Irem de Lille.

[Padé-Ti92] M.GOUY, *Approximants de Padé et la TI-92*, document Irem, disponible : <http://perso.wanadoo.fr/gery.huvent>