La géométrie du semblable,

pratiques historiques et enseignements actuels

Thomas Morel
Lille, 14.02.20

thomas.morel@univ-lille.fr

La géométrie du semblable,
pratiques historiques et enseignements actuels

1. La géométrie du semblable dans les *Éléments* d'Euclide

2. Géométrie pratique et pratiques géométriques à la Renaissance

3. Des agents du cadastre aux écoliers de la Troisième République

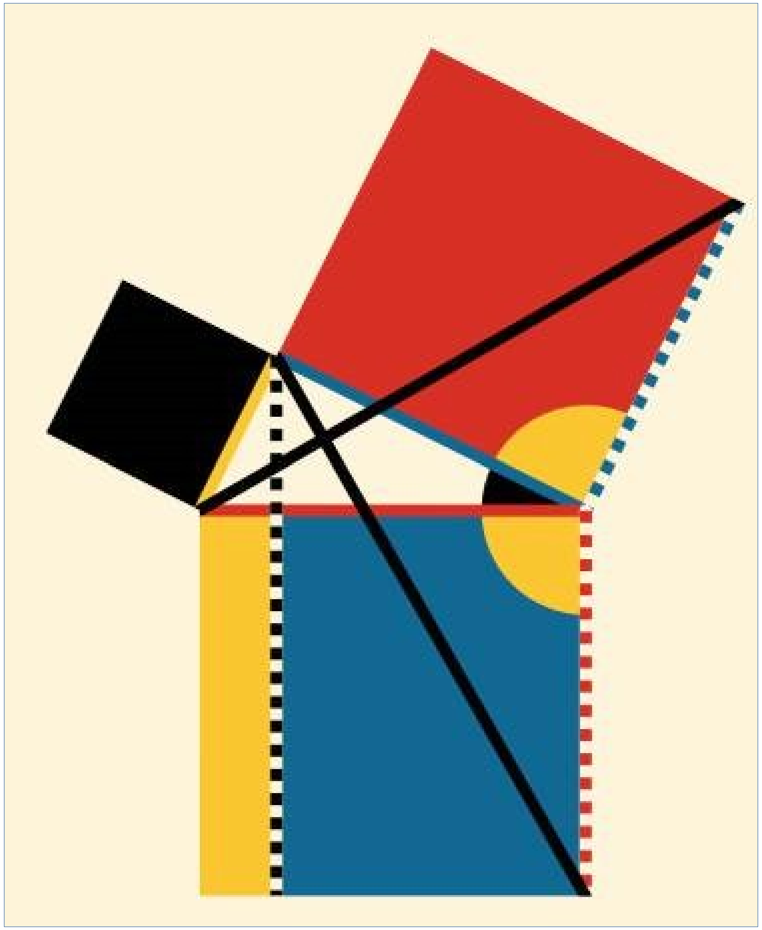
4. La géométrie du semblable : une passerelle entre les cycles

Les *Éléments* d'Euclide

En 1847, l'ingénieur civil et pédagogue Oliver Byrne (1810–1880) réédite les six premiers livres des *Éléments* dans une édition colorée.

« *Nous n'avons pas introduit des couleurs pour divertir, ou pour amuser par certaines combinaisons de teintes et de formes* » écrit-il, « *mais pour aider l'esprit dans sa recherche de la vérité, pour accroître l'efficacité de l'instruction, et pour diffuser une connaissance permanente.* »

« *Les* Éléments *d'Euclide sont de fait devenus la base des sciences mathématiques dans la totalité du monde civilisé* ».

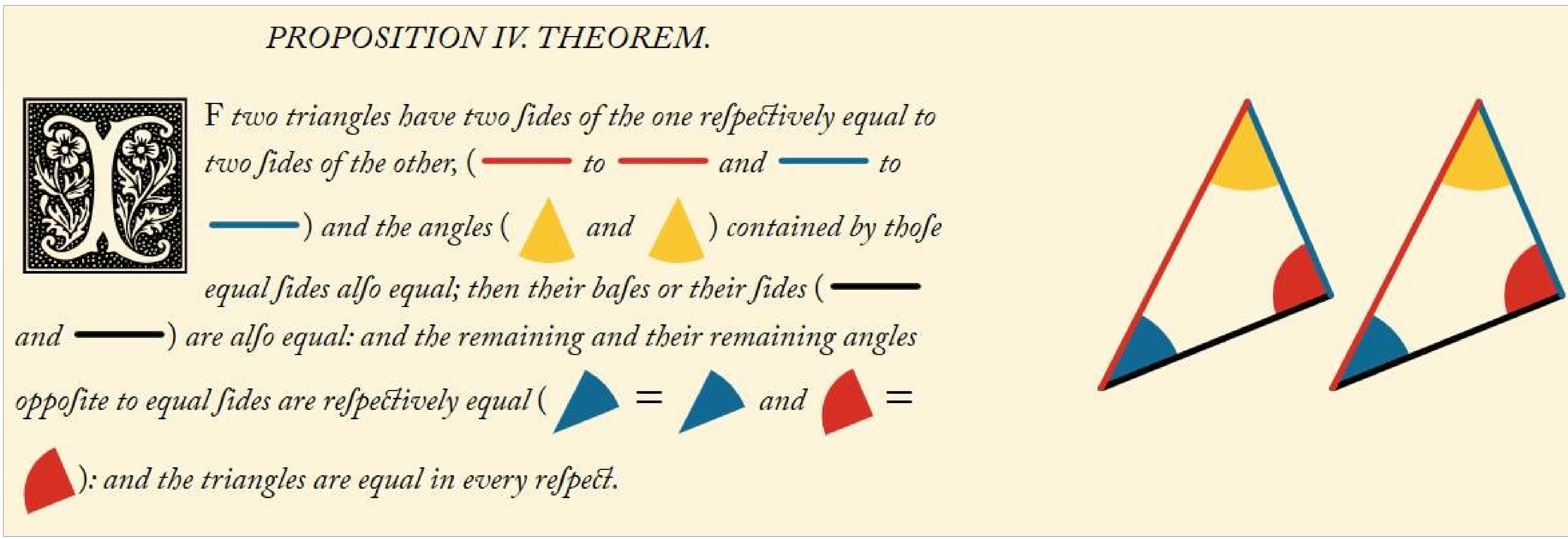


En 2019, Nicholas Rougeux a réalisé une adaptation numérique et interactive du classique d'O. Byrne, librement disponible à https://www.c82.net/euclid/

Livre I, proposition 4

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent.

Euclide, *Les Éléments*, trad. et comm. B. Vitrac, PUF, Paris, 1990, p. 200



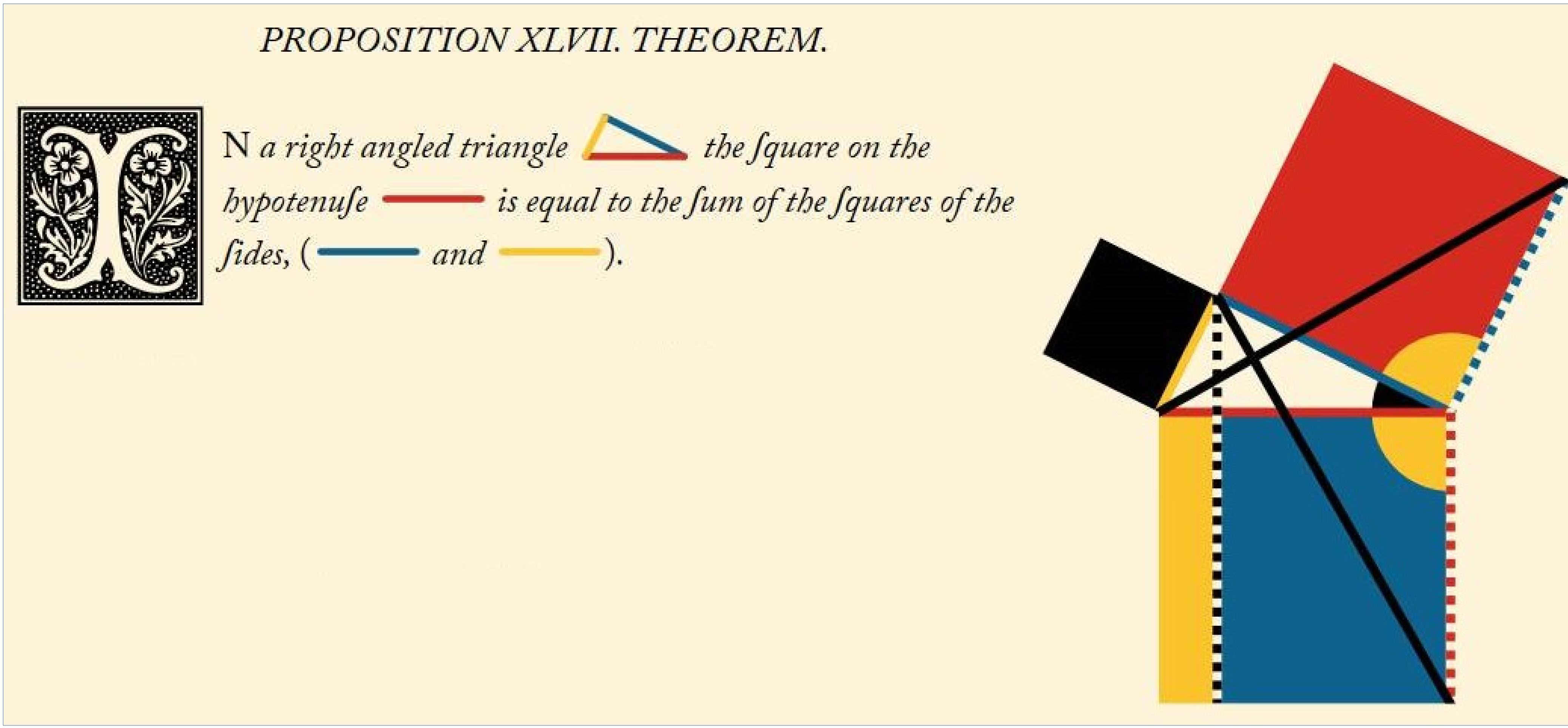
PROPOSITION IV. THEOREM.

IF *two triangles have two ſides of the one reſpectively equal to two ſides of the other, (to and to) and the angles (and) contained by thoſe equal ſides alſo equal; then their baſes or their ſides (and) are alſo equal: and the remaining and their remaining angles oppoſite to equal ſides are reſpectively equal (= and =): and the triangles are equal in every reſpect.*

Livre I, proposition 47

Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l’angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l’angle droit

Euclide, *Les Éléments*, trad. et comm. B. Vitrac, PUF, Paris, 1990, p. 282



Livre VI, proposition 2

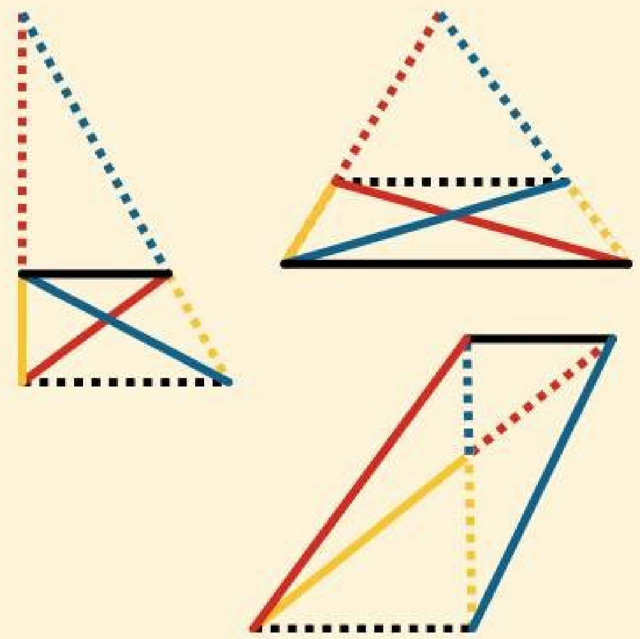
Si une certaine droite est menée parallèle à l'un des côté d'un triangle, elle coupera les côtés du triangle en proportion ; et si les côtés du triangle sont donnés en proportion, la droite jointe entre les [points de] section sera parallèle au côté restant du triangle.

Euclide, *Les Éléments*, trad. et comm. B. Vitrac, PUF, Paris, 1990, p. 159

PROPOSITION II. THEOREM.

IF *a ſtraight line* *be drawn parallel to any ſide* *of a triangle, it ſhall cut the other ſides, or thoſe ſides produced, into proportional ſegments.*

And if any ſtraight line *divide the ſides of a triangle or thoſe ſides produced, into proportional ſegments, it is parallel to the remaining ſide* .



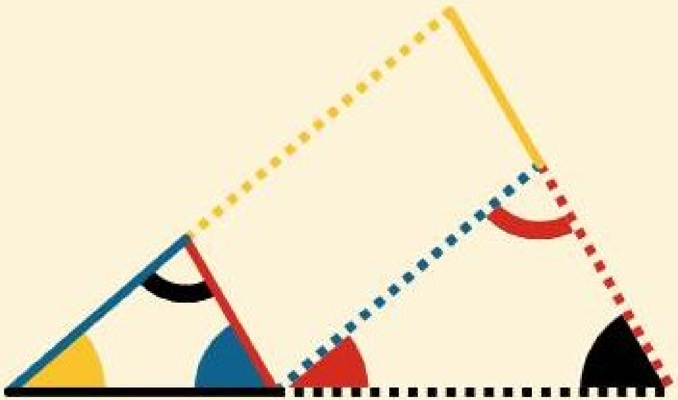
Livre VI, proposition 2

Dans les triangles équiangles sont en proportions les côtés autour des angles égaux, et homologues ceux qui sous-tendent les angles égaux.

Euclide, *Les Éléments*, trad. et comm. B. Vitrac, PUF, Paris, 1990, p. 167

PROPOSITION IV. THEOREM.

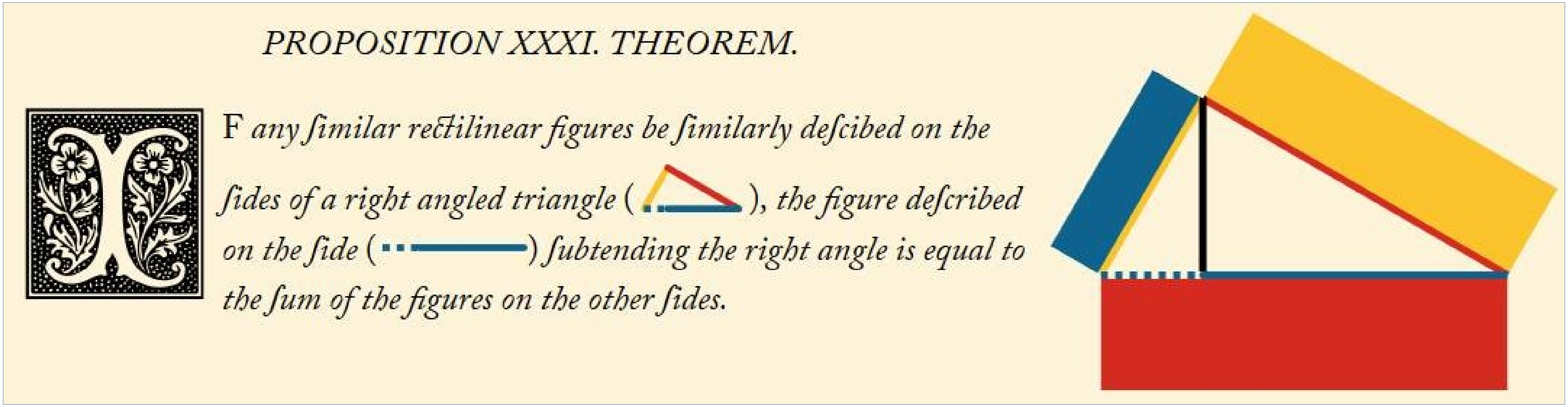
IN *equiangular triangles (and) the ſides about the equal angles are proportional, and the ſides which are oppoſite to the equal angles are homologous.*



Livre VI, proposition 31

Dans les triangles rectangles, la figure sur le côté sous-tendant l'angle droit est égale aux figures sur les côtés contenant l'angle droit, semblables et semblablement décrites.

Euclide, *Les Éléments*, trad. et comm. B. Vitrac, PUF, Paris, 1990, p. 167



PROPOSITION XXXI. THEOREM.

IF *any ſimilar rectilinear figures be ſimilarly deſcibed on the ſides of a right angled triangle ( ), the figure deſcribed on the ſide ( ) ſubtending the right angle is equal to the ſum of the figures on the other ſides.*

2. Géométrie pratique et pratiques géométriques à la Renaissance

Georg Agricola (1494–1555),
auteur du *De Re Metallica* (1556)

Livre 1 :

Le mineur doit en outre connaître de nombreux arts et sciences : … la théorie des mesures, d’une part pour pouvoir mesurer jusqu’où il faut creuser un puits pour qu’il atteigne une galerie, et d’autre part pour qu’il puisse fixer les limites de chaque concession, particulièrement en profondeur.

Livre 5 :

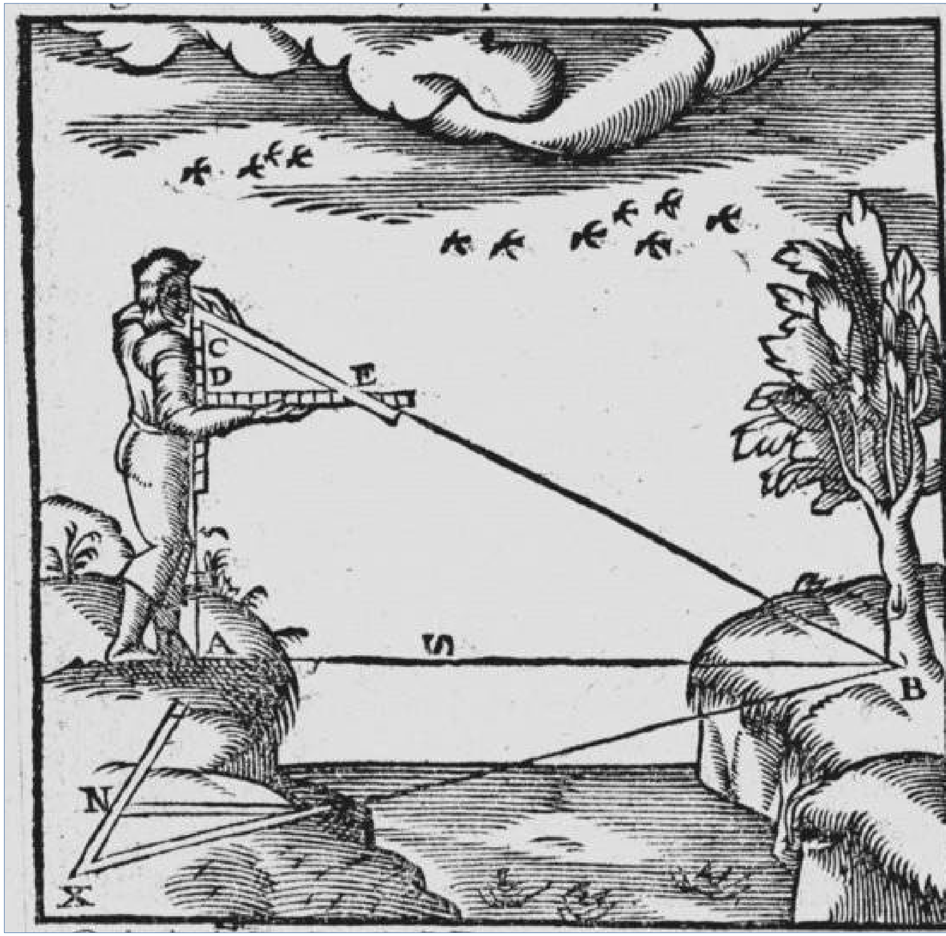
Un petit triangle est mesuré, et l’on en déduit ainsi le plus grand … Le second cordeau doit être pris autant de fois que la longueur du premier cordeau est contenue dans la longueur du cordeau incliné, pour connaître la distance entre l’embouchure de la galerie et le point où le puits est creusé.

http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/mpiwg/online/permanent/library/5CTEBAHQ&pn=5&mode=texttool

2. Géométrie pratique et pratiques géométriques à la Renaissance

Un usage très répandu en géométrie pratique …

Et toute la difficulté de telles meſures ne giſt en autre choſe qu'à chercher vne ligne parallele à celle qu'on veut meſurer, qui n'eſt autre choſe que couper les coſtez d'vn triangle proportionnellement : *Comme il eſt monſtré tant en la 2. que 4. propoſition du 6. d'Euclide* : Et ce qui ſera facilement pratiqué cy apres.



les pinnulles d'icelle, l'extremité B : alors ie dis que le petit triãgle CDE, eſt equiangle & proportionnel au grand ABC, *par la 4. du 6.* La ligne donc DE, coupant les coſtez du grand triãgle CA, & CB, aux poincts D, E, les couppe proportionnellement *par la 2. du 6.* Telle raiſon donc que CD a en DE, telle & ſemblable

Jean Errard, *La géométrie et practique générale d'icelle*, Paris, Auvray, 1594 [1621]

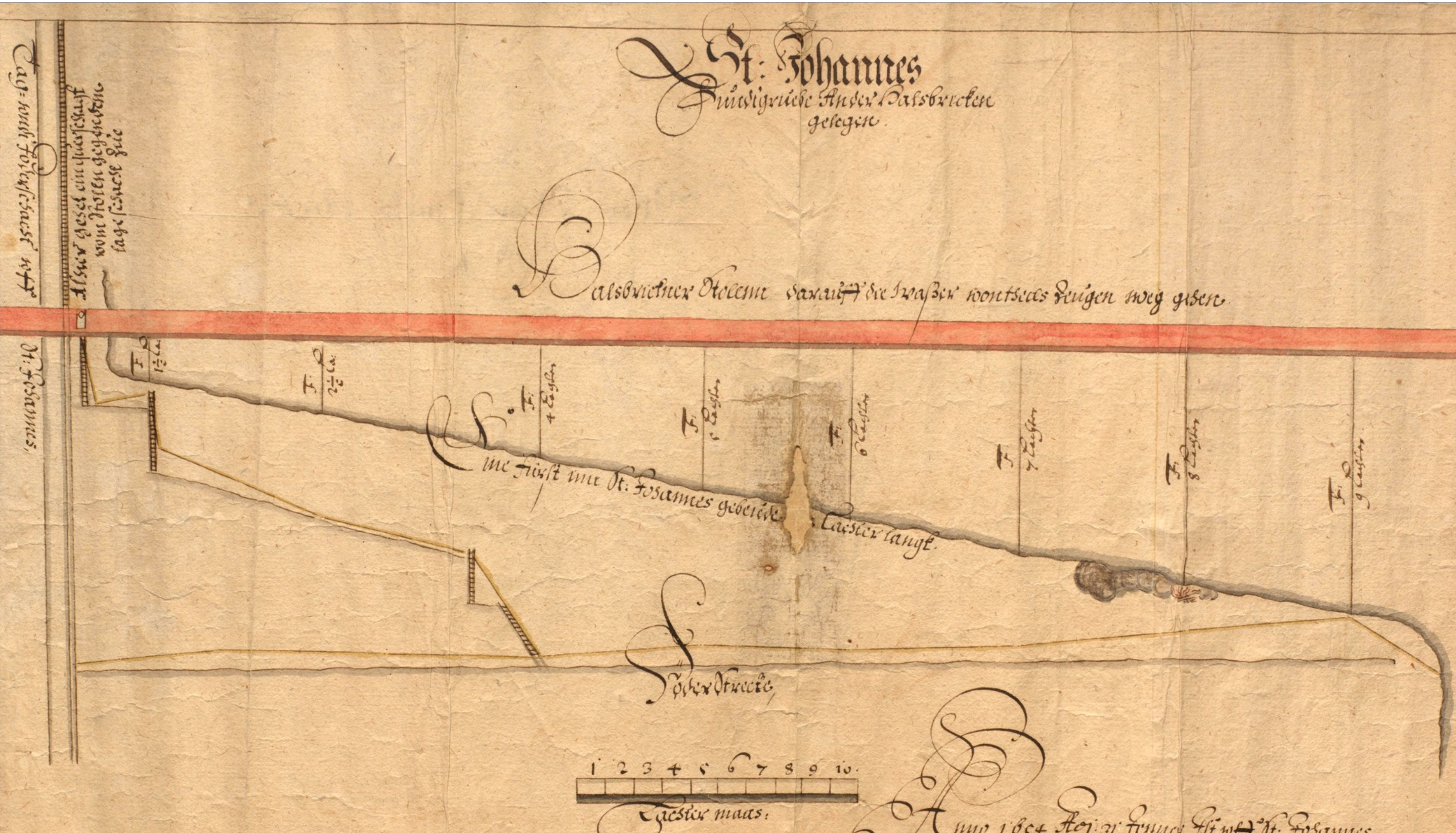
Frédéric Métin, La fortification géométrique de Jean Errard et l'école française de fortification (1550-1650) → http://www.theses.fr/2016NANT4055

… mais qui ne correspond pas nécessairement à la réalité des pratiques

Oronce Finé, *Composition et usage du carré géométrique*, Exemplaire de présentation à François I[er], 1538
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b105090847/f32.item)

2. Géométrie pratique et pratiques géométriques à la Renaissance

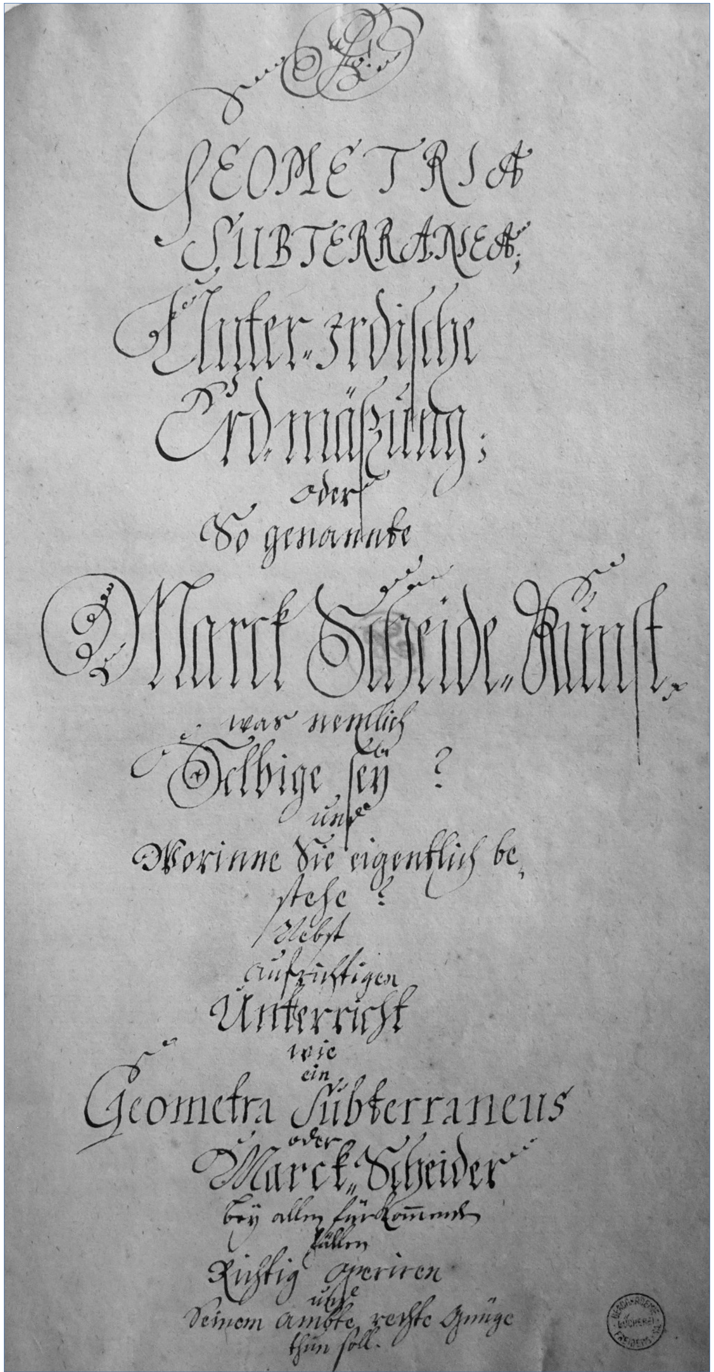
Utilisation possible des triangles semblables - ou du moins de la proportionnalité - pour le creusement d’une galerie de mine (1654).

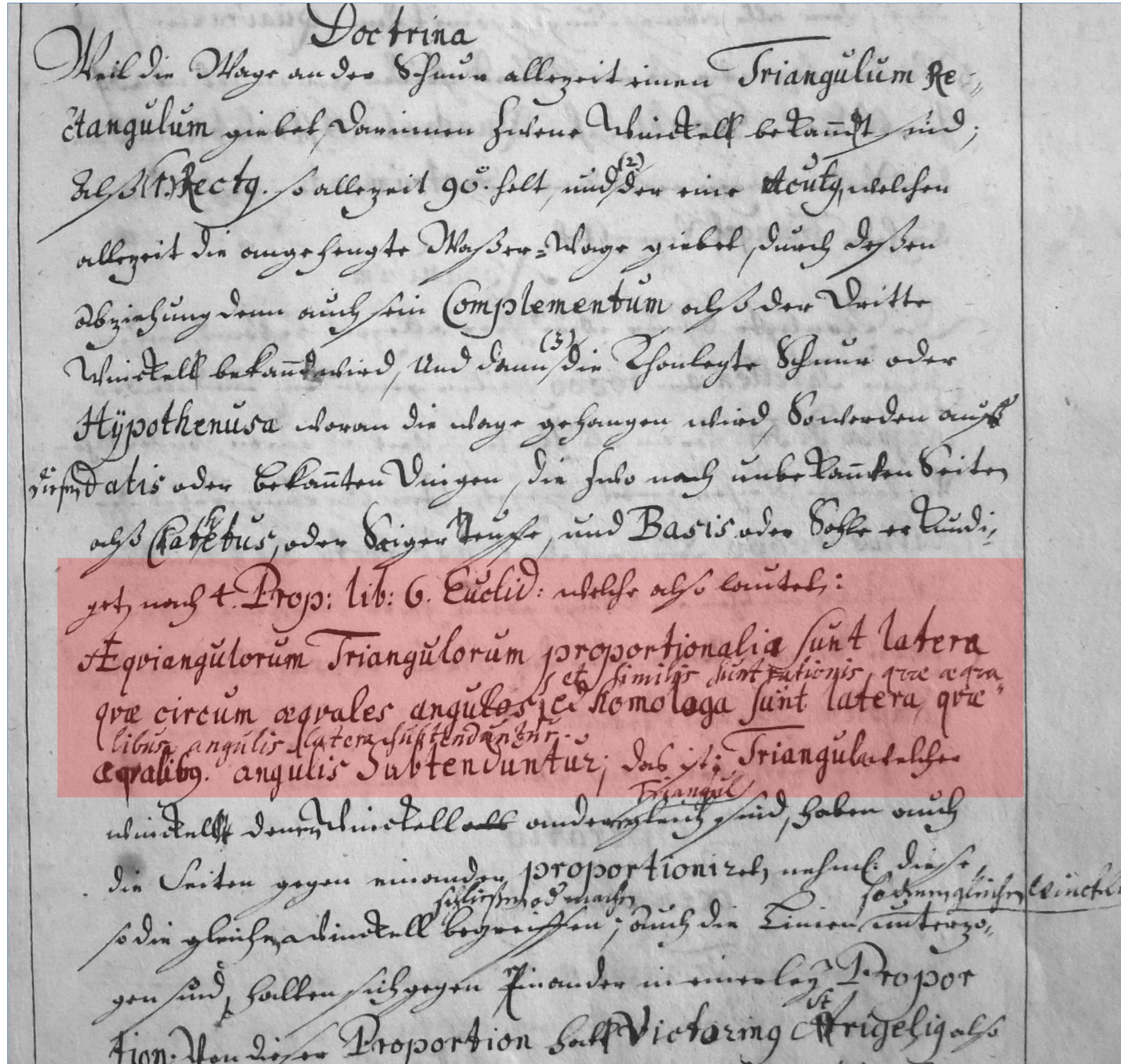


Sächsisches Staatsarchiv,40040 Fiskalische Risse, H1346 Grund und Seigerriss, 31 Januar 1654

2. Géométrie pratique et pratiques géométriques à la Renaissance

La géométrie euclidienne du semblable est cependant bien connue des praticiens :





Manuscrit de géométrie souterraine, anonyme, 17ème siècle
Source : TU BAF, WA XVII 11, page de garde et folio 30r.
→ Thomas Morel, *Bringing Euclid into the Mines*, in *Translating early modern Science*, Brill, Leiden, 2017, p. 154-181

3. Des agents du cadastre aux écoliers de la troisième république

Poids et mesures, tableau dressé conformément à la loi du 11 juillet et au décret du 28 juillet 1903, éditions Forest, BNF, GE C-5596 (ark:/12148/btv1b53066549q)

3. Des agents du cadastre aux écoliers de la troisième république

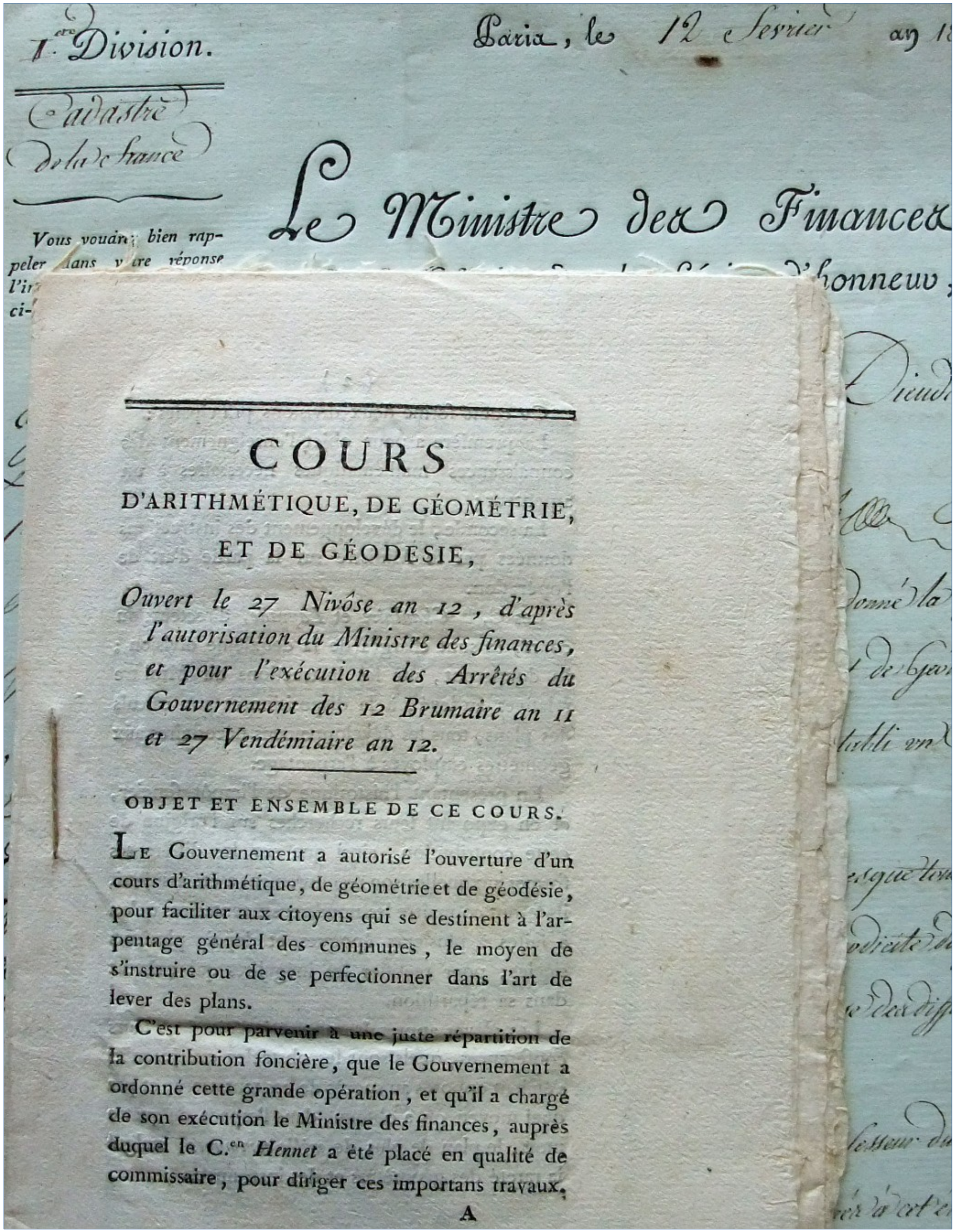
Unification des poids et mesure durant la Révolution Française. Lancement d’un cadastre parcellaire, dit cadastre napoléonien, au début du 19ème siècle.

Émergence d’une culture commune autour de la géométrie pratique et des figures semblables.

Exemple local : Philogone Barbotin, arpenteur dans le département du Nord.

→ http://images.math.cnrs.fr/Philogone-Barbotin-1785-1860-geometre-arpenteur-et-agent-voyer.html

3. Des agents du cadastre aux écoliers de la troisième république



1.ère Division.

Cadastre de la France

Paris, le 12 Février an 1[…]

Le Ministre des Finances

Vous voudrez bien rappeler dans votre réponse l'i[…] ci-[…]

COURS
D'ARITHMÉTIQUE, DE GÉOMÉTRIE, ET DE GÉODESIE,

Ouvert le 27 Nivôse an 12, d'après l'autorisation du Ministre des finances, et pour l'exécution des Arrêtés du Gouvernement des 12 Brumaire an 11 et 27 Vendémiaire an 12.

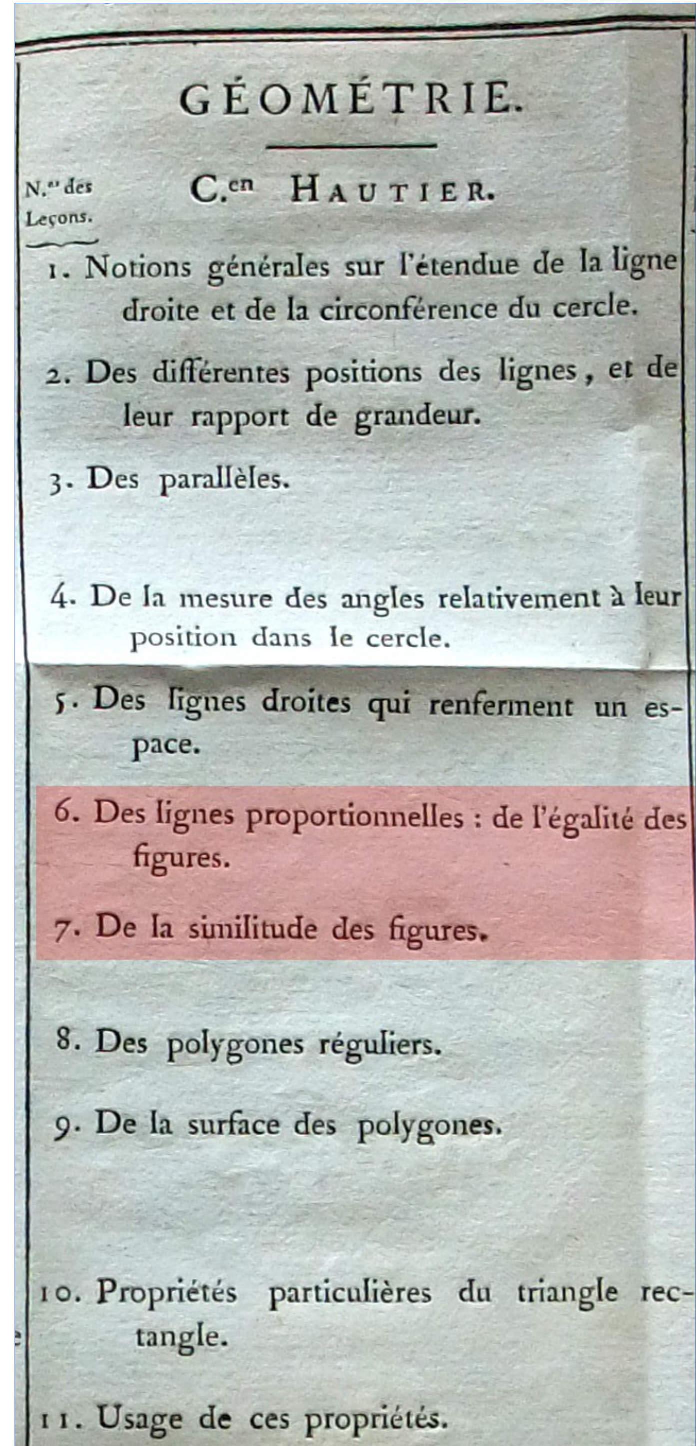
OBJET ET ENSEMBLE DE CE COURS.

Le Gouvernement a autorisé l'ouverture d'un cours d'arithmétique, de géométrie et de géodésie, pour faciliter aux citoyens qui se destinent à l'arpentage général des communes, le moyen de s'instruire ou de se perfectionner dans l'art de lever des plans.

C'est pour parvenir à une juste répartition de la contribution foncière, que le Gouvernement a ordonné cette grande opération, et qu'il a chargé de son exécution le Ministre des finances, auprès duquel le C.en *Hennet* a été placé en qualité de commissaire, pour diriger ces importans travaux.

A

Archives du Nord, P 24(2), Nominations et Congés



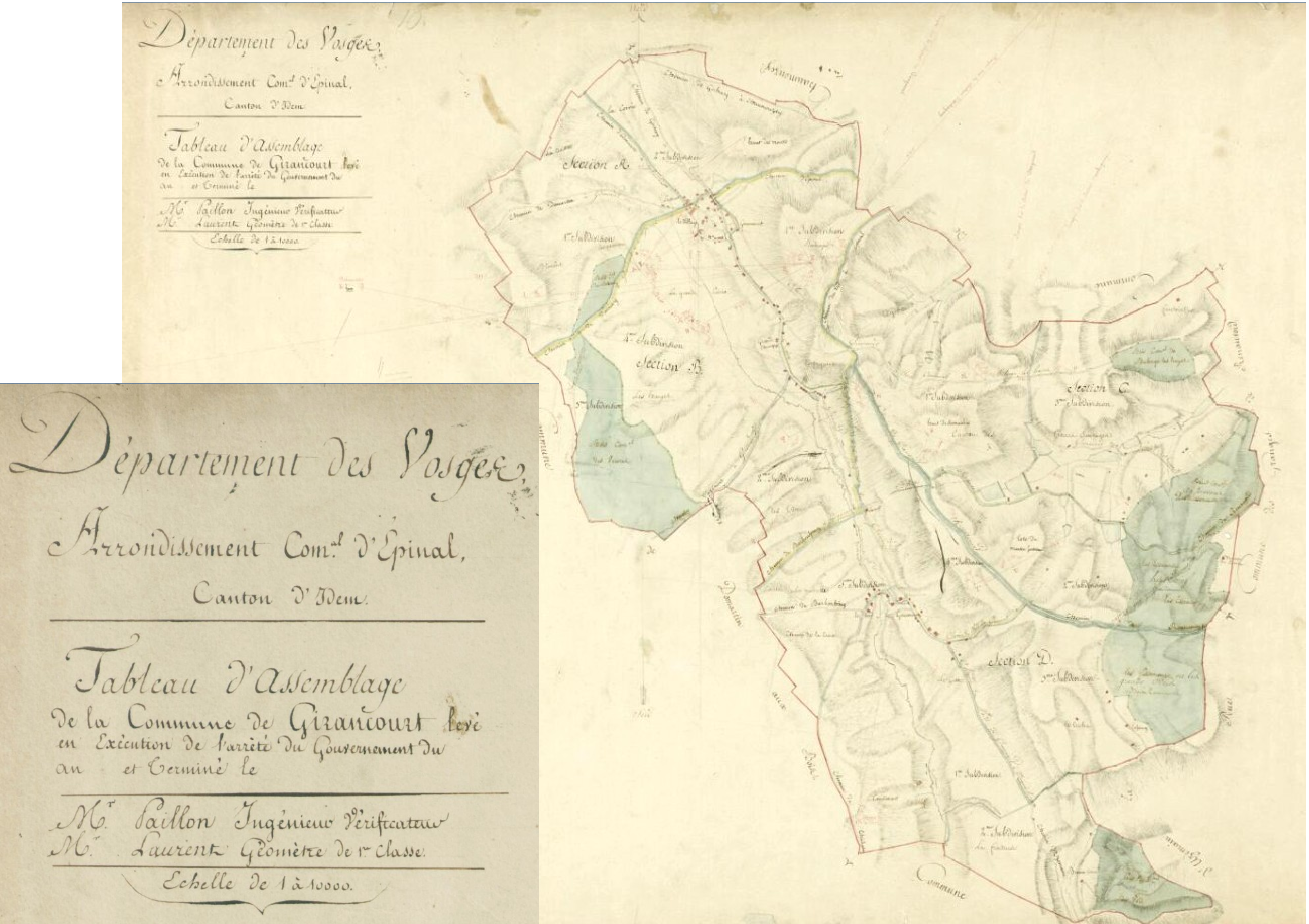
GÉOMÉTRIE.

C.en HAUTIER.

N.os des Leçons.

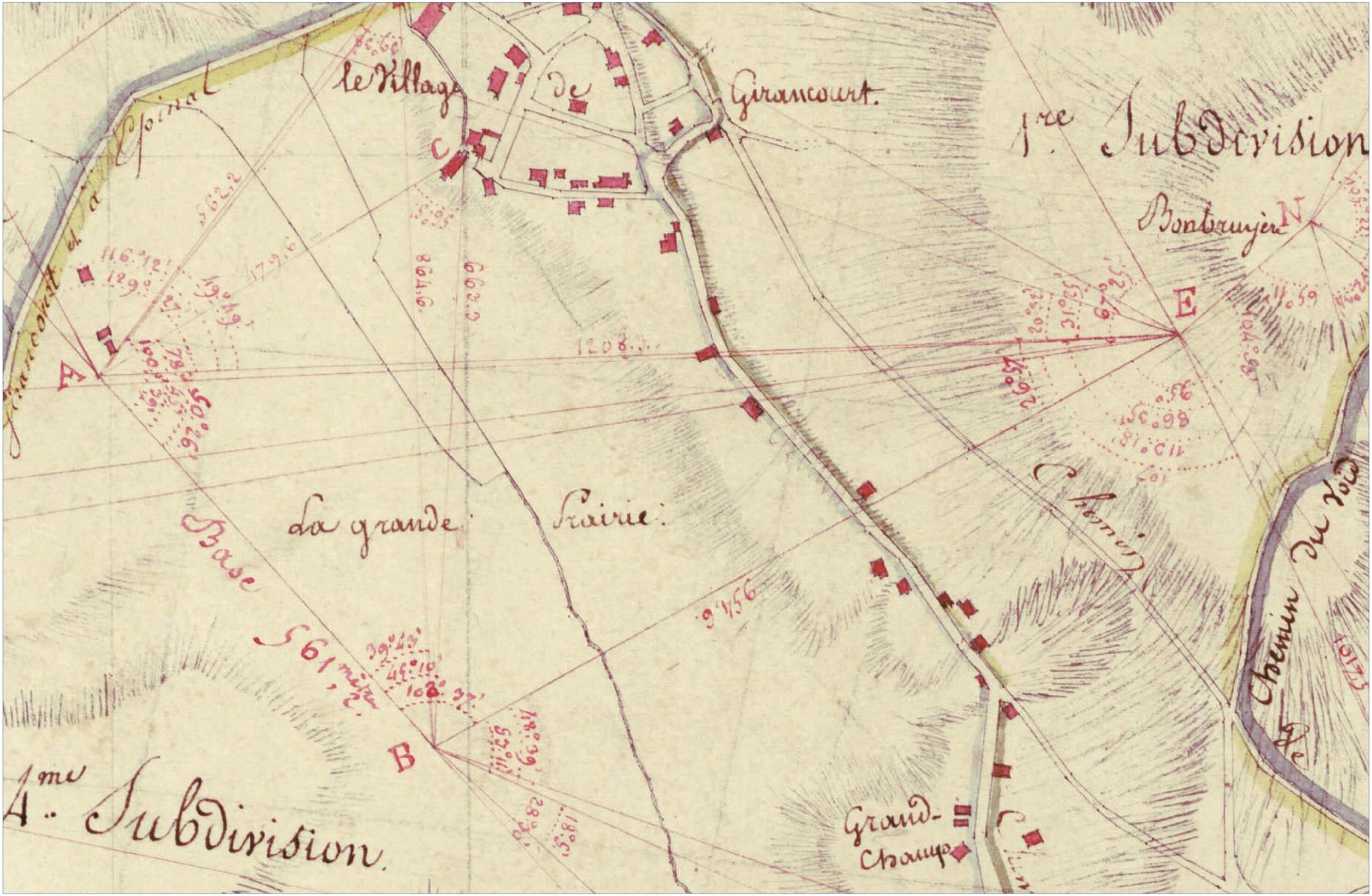
1. Notions générales sur l'étendue de la ligne droite et de la circonférence du cercle.
2. Des différentes positions des lignes, et de leur rapport de grandeur.
3. Des parallèles.
4. De la mesure des angles relativement à leur position dans le cercle.
5. Des lignes droites qui renferment un espace.
6. Des lignes proportionnelles : de l'égalité des figures.
7. De la similitude des figures.
8. Des polygones réguliers.
9. De la surface des polygones.
10. Propriétés particulières du triangle rectangle.
11. Usage de ces propriétés.

3. Des agents du cadastre aux écoliers de la troisième république



Cadastre de la commune de Girancourt, 1808-1813, Archives départementales des Vosges, Cote 3 P 5141/1 (tableau d'assemblage)

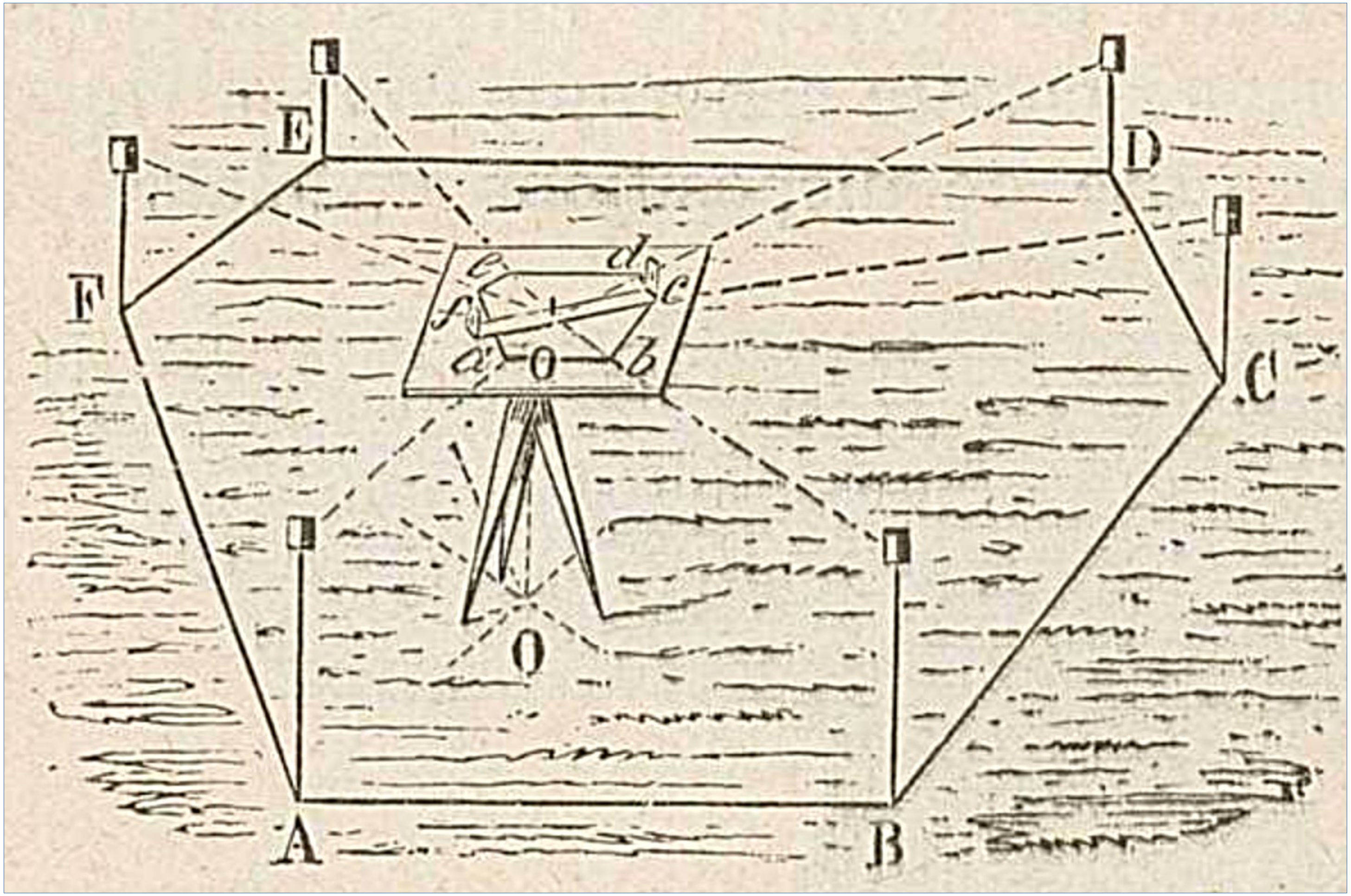
3. Des agents du cadastre aux écoliers de la troisième république



1. Établir le canevas trigonométrique.
Exemple du cadastre de la commune de Girancourt (tableau d’assemblage, détail)

3. Des agents du cadastre aux écoliers de la troisième république

« L'art de lever les plans n'est que celui de construire sur le papier des polygones semblables à ceux que forment sur le terrain les points dont on veut connaître les situations respectives. »



Haut : Sylvestre-François Lacroix, *Eléments de géométrie*, 1811, cité dans [Chevalarias2018, p. 81]
Bas : Lever le plan : principe du levé à la planchette par rayonnement
Manuel d'arpentage pour les écoles primaires par une réunion de professeurs, anonyme, c. 1900, p. 82

Méthode par décomposition en triangles :

« Pour lever le plan d'un terrain, à la chaîne seule, par décomposition en triangle [...], on le décompose en triangles, on mesure les côtés de tous les triangles et on inscrit ces mesures sur un croquis.

Il suffit de construire, dans le même ordre et dans le même sens que sur le terrain, les différents triangles dont on connaît les trois côtés. »

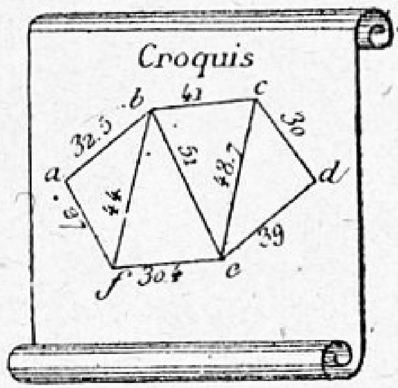


Fig. 62.

Côtés.		Diagonales.	
AB . . .	32,5	. . . .	
BC . . .	41	BF . . .	44
CD . . .	30	BE . . .	51
DE . . .	39	CE . . .	48,7
EF . . .	30,4	. . . .	
FA . . .	27	. . . .	

Au lieu d'écrire les mesures sur le croquis, on peut former un tableau.

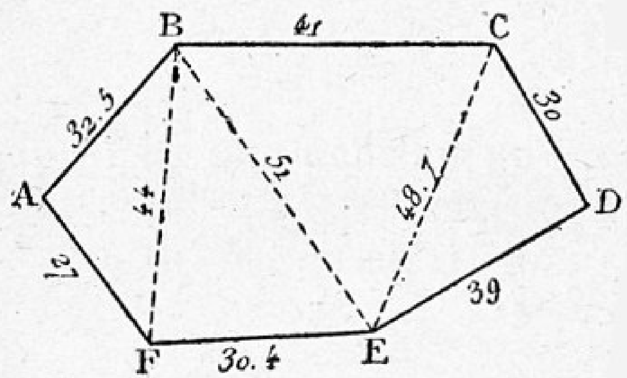


Fig. 63. — Plan levé à la chaîne

Manuel d'arpentage pour les écoles primaires par une réunion de professeurs,, anonyme, c. 1900, p. 52

Méthode par alignement :

« Il convient de prendre pour directrice l'alignement qui correspond le mieux aux conditions suivantes :

1° La directrice doit être d'un parcours facile. […]
3° Cette directrice doit ordinairement être dirigée dans le sens de la plus grande dimension du terrain, afin que les ordonnées soient aussi courtes que possible. »

« On prend AB pour directrice, et on jalonne cette ligne, sur laquelle on élève des perpendiculaires qui doivent passer aux sommets J, L, D, F, H. On met un jalon (C, K, E, G) au pied des perpendiculaires »

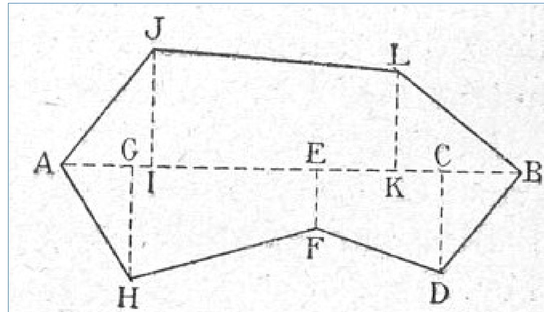


Fig. 43. — AB, directrice. — CD, EF, GH, IJ, KL, ordonnées.

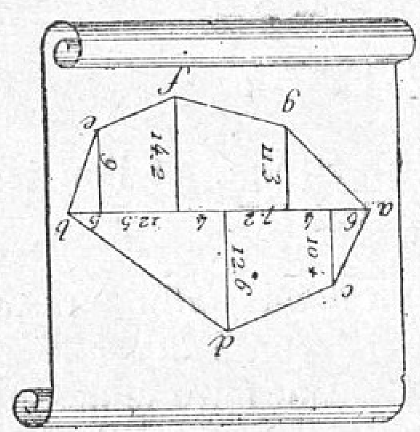


Fig. 66. — Croquis.

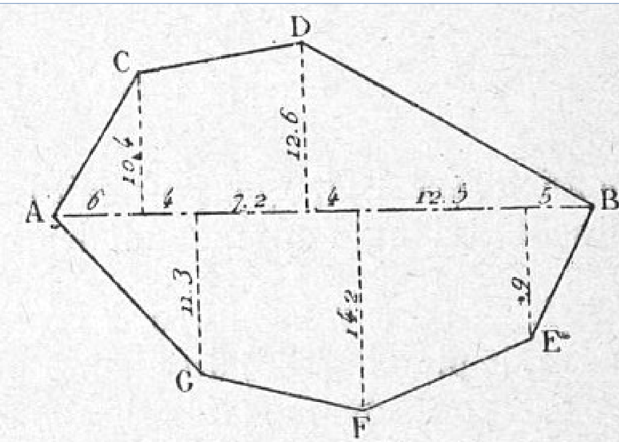


Fig. 67. — Plan à 1 millim. par mètre.

Levé à l'équerre par alignement.

Manuel d'arpentage pour les écoles primaires par une réunion de professeurs,, anonyme, c. 1900, p. 35 et 54

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ARPENTAGE,

ET

DE L'AVIS DES PLANS,

SUIVI

DE LA MESURE DES BOIS ET DES SOLIDES,

Ouvrage destiné aux Écoles communales supérieures et élémentaires,
et aux Propriétaires ;

APPROUVÉ PAR LE CONSEIL ROYAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ;

PAR M. L. LAMOTTE,

Auteur du COURS MÉTHODIQUE DE DESSIN LINÉAIRE.

TROISIÈME ÉDITION.

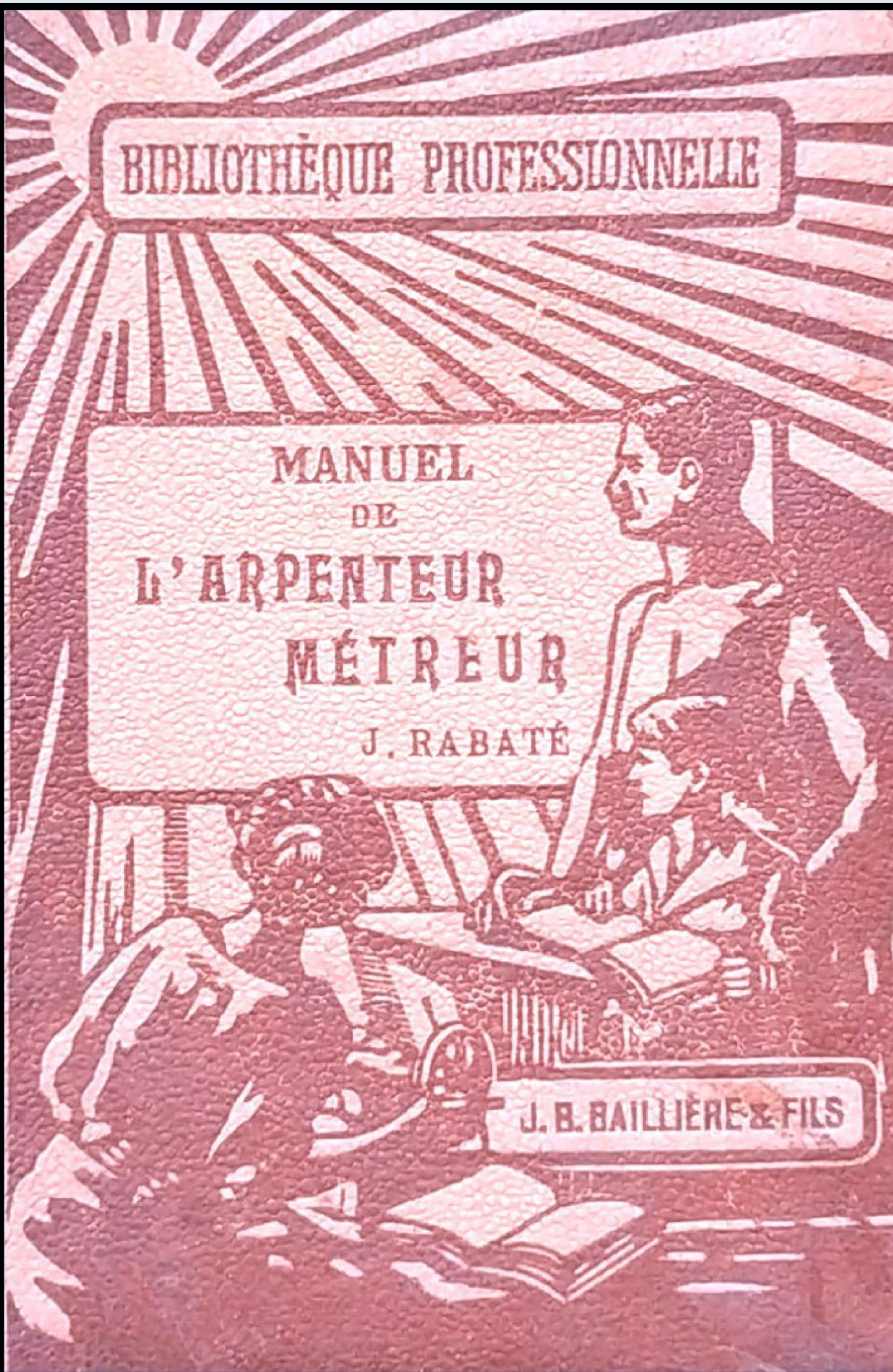
PARIS,
LIBRAIRIE CLASSIQUE ET ÉLÉMENTAIRE
DE L. HACHETTE,
RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12.

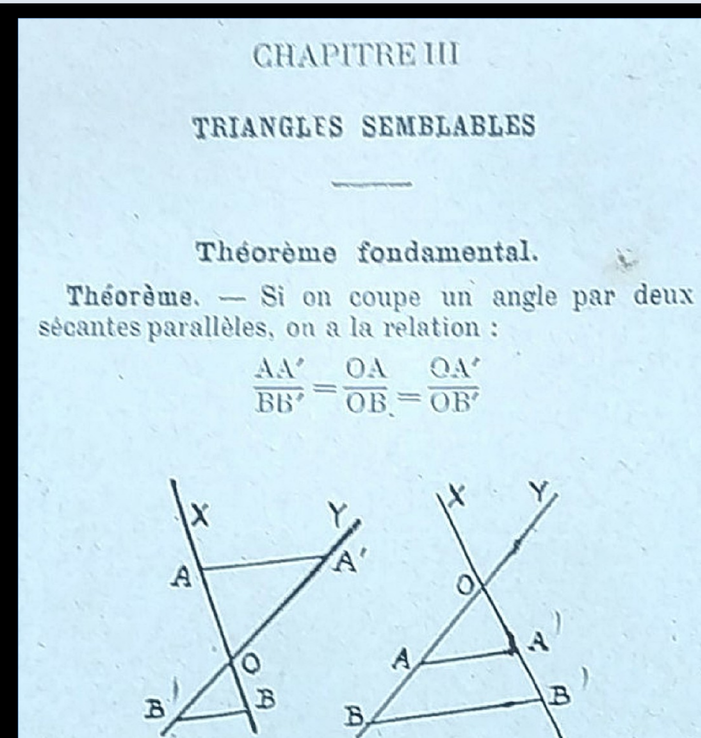
1834.

L'arpentage proprement dit, c'est-à-dire l'évaluation des surfaces, est aussi facile à étudier qu'à enseigner. Nous venons de publier des *Tableaux d'arpentage* destinés à faire pénétrer cette étude jusque dans les plus petites localités.

Si la loi sur l'enseignement primaire n'oblige pas les instituteurs des petites écoles à enseigner l'arpentage, elle ne le défend pas non plus, et les instituteurs comprendront combien il sera utile pour eux, d'ajouter une branche d'instruction qui leur fera honneur, qui leur procurera des porte-chaînes intelligents, et qui leur fournira une ressource nécessaire dans des communes où le traitement fixe est très modique.

3. Des agents du cadastre aux écoliers de la troisième république





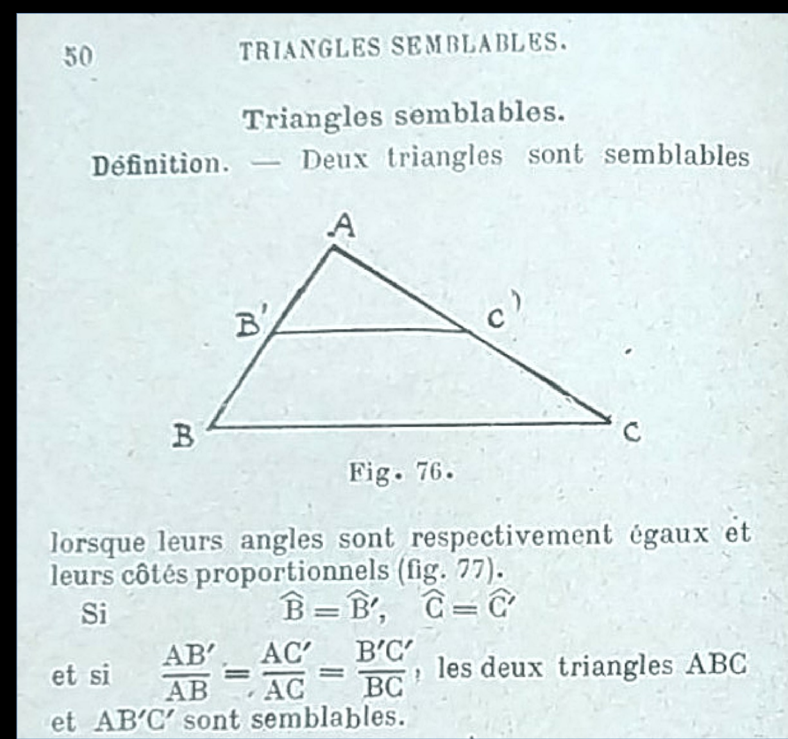
CHAPITRE III

TRIANGLES SEMBLABLES

Théorème fondamental.

Théorème. — Si on coupe un angle par deux sécantes parallèles, on a la relation :

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$



50 TRIANGLES SEMBLABLES.

Triangles semblables.

Définition. — Deux triangles sont semblables

Fig. 76.

lorsque leurs angles sont respectivement égaux et leurs côtés proportionnels (fig. 77).

Si $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$

et si $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$, les deux triangles ABC et AB'C' sont semblables.

BIBLIOTHÈQUE DU CULTIVATEUR

PUBLIÉE

AVEC LE CONCOURS DU MINISTRE DE L'AGRICULTURE

GÉOMÉTRIE AGRICOLE

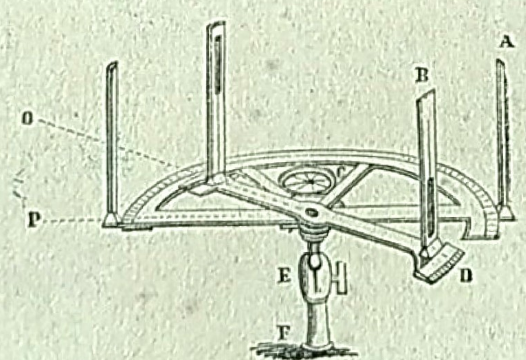
COMPRENANT

LA GÉOMÉTRIE USUELLE, LE DESSIN LINÉAIRE,
L'ARPENTAGE, LE LEVÉ DES PLANS, LE NIVELLEMENT, LE TOISÉ
LE CUBAGE DES BOIS ET LE JAUGEAGE

PAR

LEFOUR

Ancien fermier à La Varenne-Saint-Maur, Inspecteur général de l'Agriculture



GRAPHOMÈTRE.

PARIS

LIBRAIRIE AGRICOLE DE LA MAISON RUSTIQUE

26, RUE JACOB, 26

Pages.

Avertissement. 1

Ire PARTIE.—GÉOMÉTRIE USUELLE.

Notions préliminaires. 3

Section I. — GÉOMÉTRIE PLANE.

CHAPITRE I. Des lignes. 5

§ 1. Des lignes en général . .

§ 2. Rapport des lignes entre elles 10

Angles et perpendiculaires. 10

Parallèles 18

CHAP. II. Des polygones 25

§ 1. Des triangles et des quadrilatères 25

§ 2. Du cercle. 30

§ 3. Division du cercle et mesure des angles. 34

§ 4. Des polygones réguliers inscrits et circonscrits . . 40

§ 5. Ellipse, ovale et spirale. 43

§ 6. Mesure des polygones . . 45

§ 7. Mesure du cercle 49

CHAP. III. Comparaison des figures. 53

§ 1. Figures proportionnelles 53

§ 2. Figures égales. 61

§ 3. Figures semblables . . . 67

§ 4. Figures équivalentes . . 69

§ 5. Carré de l'hypoténuse. 72

Section II. — GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

239. On appelle figure semblables celles qui ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels

243. La théorie des *triangles semblables* a des applications nombreuses dans la mesure des lignes inaccessibles et le partage des champs. (Voir l'*Arpentage*).

Lefour, *Géométrie Agricole*, Paris, Maison rustique, p. 66-67

COMPARAISON DES FIGURES. 69

Problèmes. — 253. Un parc à moutons a de côté vingt claies de 3 mètres. De combien sa superficie serait-elle réduite si les claies avaient seulement 1 mètre ?

254. Deux parcs ont le même nombre de claies au carré, mais l'un a des claies de $\frac{1}{3}$ moins longues que celles de l'autre ; exprimer en termes fractionnaires de combien il est moins grand.

255. On veut faire une planche de jardin carrée un quart plus petite qu'une autre dont les côtés ont 20 mètres. Quelle longueur devra-t-on donner aux côtés de cette planche ?

256. Comment peut-on partager également un champ de froment rectangulaire entre quatre moissonneurs ?

257. Pour augmenter de moitié la surface d'une aire circulaire à dépiquer le froment, de combien doit-on allonger le rayon ?

258. Un champ triangulaire de 2 hectares a un côté de 200 mètres. Quelle est l'étendue d'un champ semblable dont le côté correspondant a seulement 60 mètres (245) ?

COURS
DE
GÉOMÉTRIE
THÉORIQUE ET PRATIQUE

A L'USAGE
DES LYCÉES ET DES COLLÈGES
DES ÉCOLES NORMALES PRIMAIRES
DE TOUS LES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

CONTENANT
DE NOMBREUSES APPLICATIONS AU DESSIN, A L'ARCHITECTURE
A L'ARPENTAGE, AU LEVÉ DES PLANS, AU NIVELLEMENT
ET
PLUS DE MILLE EXERCICES PROPOSÉS DE GÉOMÉTRIE PURE ET APPLIQUÉE

PAR
M. FÉLICIEN GIROD
Agrégé de l'Université,
Professeur de mathématiques au lycée Corneille de Rouen.

DIX-HUITIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE CLASSIQUE DE F.-E. ANDRÉ GUÉDON
E. ANDRÉ FILS, SUCCESSEUR
6, rue Casimir-Delavigne (près l'Odéon)
Ci-devant, 15, RUE SÉGUIER

1901

§ II. DROITES COUPÉES PAR DES PARALLÈLES.

THÉORÈME

291. *Toute ligne droite* DF, *parallèle à l'un des côtés* AC *d'un triangle* ABC, *divise les deux autres côtés* BA *et* BC *en parties proportionnelles* (fig. 203).

Supposons que le rapport $\frac{BD}{DA}$ soit égal à $\frac{3}{2}$; il en résulte (nº 223) que les droites BD et DA ont une commune mesure contenue trois fois dans BD et deux fois dans DA. Si l'on divise BA en cinq parties égales, il y aura trois de ces parties dans BD et deux dans DA. Par les points de division G, H, K, je mène des parallèles à AC, qui vont couper le côté BC aux points L, M, N, et je dis que les segments BL, LM, MF, FN, NC, sont égaux. Considérons-en deux quelconques, BL et MF, par exemple; si l'on mène par le point M une parallèle MP à BA jusqu'à sa rencontre avec DF, on obtient un triangle MPF qui est égal au triangle BGL. Ces triangles ont en effet les côtés MP et BG égaux, car BG = DH, par construction, et les droites MP, DH sont égales comme côtés opposés d'un parallélogramme; de plus les angles PMF et GBL sont égaux comme correspondants et les angles MPF et BGL sont égaux comme ayant les côtés parallèles et dirigés dans un même sens.

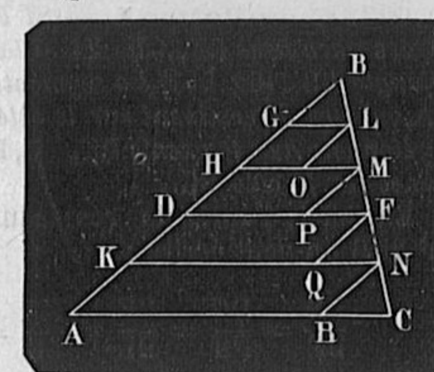


Fig. 203.

Les triangles considérés sont égaux parce qu'ils ont un côté égal, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. On en conclut que MF est égal à BL. On prouverait de la même manière que BL est égal à tous les autres segments. Or il y a trois de ces segments dans BF et deux dans FC.

Donc

$$\frac{BF}{FC} = \frac{3}{2}, \text{ par suite } \frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FC}. \quad (1) \quad \text{C. Q. F. D.}$$

CHAPITRE II

POLYGONES SEMBLABLES

§ I. TRIANGLES SEMBLABLES

313. Deux polygones d'un même nombre de côtés sont **semblables** lorsqu'ils ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.

On appelle côtés **homologues** ceux qui sont adjacents à des angles respectivement égaux; ces angles eux-mêmes sont dits **angles homologues.** Le rapport de deux côtés homologues quelconques est le *rapport de similitude* des deux polygones.

Ainsi les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 219) qui satisfont aux deux conditions

$$A = A', \ B = B', \ C = C',$$
$$D = D', \ E = E'.$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

sont semblables.

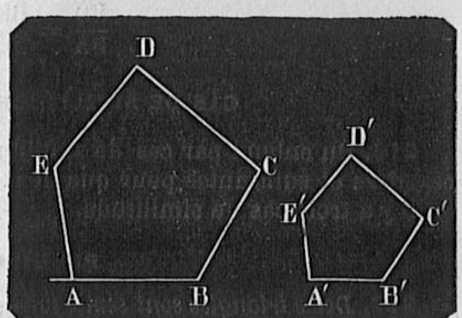


Fig. 219.

AB et A'B' sont deux côtés homologues, parce que les angles A et B sont respectivement égaux aux angles A' et B'.

Les angles A et A', B et B' sont homologues.

La valeur numérique du rapport $\frac{AB}{A'B'}$ est le rapport de similitude des deux polygones.

314. Remarque. — Dans deux triangles semblables ABC, A'B'C', (fig. 220) deux côtés homologues quelconques AB et A'B' sont opposés à des angles égaux C et C'.

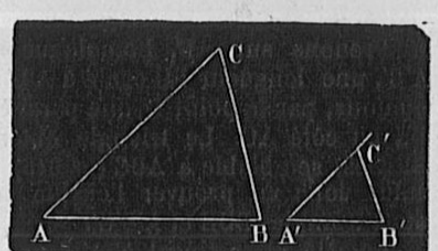


Fig. 220.

LIVRE III

LES FIGURES SEMBLABLES

CHAPITRE PREMIER

Lignes proportionnelles.
§ I. Notions préliminaires........ 101
§ II. Droites coupées par des parallèles........................ 105
§ III. Droites coupées par des antiparallèles...................... 111
§ IV. Lignes proportionnelles dans le cercle..................... 112
Exercices........................ 114

CHAPITRE II

Polygones semblables.
§ I. Triangles semblables......... 115
§ II. Polygones semblables........ 120
§ III. Polygones homothétiques... 123
Exercices........................ 128

CHAPITRE III

Relations numériques des lignes dans les triangles..... 129
Triangle rectangle................ 129
Triangle quelconque............... 132
Calcul des hauteurs............... 134
Calcul des médianes............... 135
Calcul des bissectrices........... 138
Calcul du rayon du cercle circonscrit........................ 140
§ II. Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical.... 140
Exercices........................ 143

CHAPITRE IV

Constructions relatives aux lignes proportionnelles.... 144
Construction des formules algébriques........................ 149
Applications :
Compas de réduction, compas de proportion..................... 151
Échelle de proportion............. 152
Méthode des carreaux.............. 153
Pantographe....................... 153
Mesure des distances inaccessibles. 154
Levé des plans :
Levé au mètre..................... 156
Levé au graphomètre.............. 156
Levé à l'équerre.................. 156
Levé à la planchette.............. 157
Exercices........................ 158

CHAPITRE V

Polygones réguliers.
§ I. Notions générales........... 160
§ II. Construction des polygones réguliers.................... 164
§ III. Mesure de la circonférence.. 171
Méthode des périmètres........... 174
Méthode des isopérimètres........ 177
Applications :
Carrelage, polygones étoilés...... 183
Exercices........................ 186

§ II. POLYGONES SEMBLABLES.

THÉORÈME

329. *Deux polygones* ABCDE, A'B'C'D'E' *composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés sont semblables* (fig. 228).

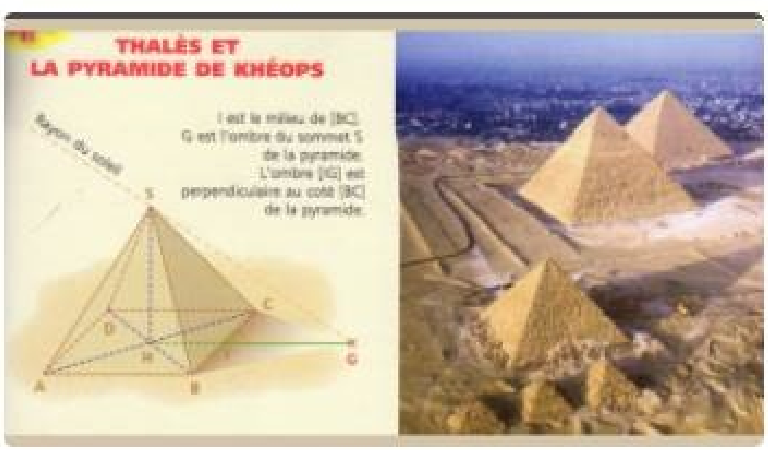
Étant donné le polygone ABCDE décomposé en triangles par les diagonales partant du sommet A, on construit un triangle A'B'C' semblable à ABC et sur A'C', côté homologue de AC, un triangle A'C'D', semblable à ACD, de manière que les sommets A et C' soient les homologues de

Au début du 20ème siècle, la géométrie du semblable est donc très largement représentée dans l'enseignement des mathématiques, pour des raisons diverses.

Dans l'enseignement secondaire, il s'agit d'une poursuite de la tradition euclidienne classique.

Dans l'enseignement primaire et dans les écoles professionnelles, il s'agit d'une géométrie de la mesure et de l'arpentage.

On remarquera incidemment que le « théorème de Thalès » n'est jamais mentionné. Plus exactement, il s'agit d'un résultat parmi d'autre dans une géométrie focalisée sur les figures semblables



AUX SOURCES DU « THÉORÈME DU PERROQUET »

le 14 novembre 2018

Alain Herreman

La mesure de la hauteur d'une pyramide d'Égypte par Thalès est sans doute un des récits emblématiques de l'histoire des mathématiques...

lire l'article

http://images.math.cnrs.fr/Aux-sources-du-theoreme-du-perroquet.html

4. La géométrie du semblable : une passerelle entre les cycles

En cycle 4 :

- « Distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure. Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité » (Programmes)

- « Les triangles semblables fournissent un vocabulaire commode dans les différents énoncés du théorème de Thalès » (Documents d'accompagnement, Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer)

Exercice 2 **19 points**

Dans cet exercice, on donnera, si nécessaire, une valeur approchée des résultats au centième près.

Pour construire le décor d'une pièce de théâtre (*Figure 1*), Joanna dispose d'une plaque rectangulaire ABCD de 4 m sur 2 m dans laquelle elle doit découper les trois triangles du décor avant de les superposer. Elle propose un découpage de la plaque (*Figure 2*).

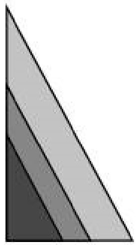


Figure 1

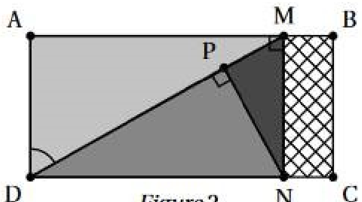


Figure 2

Le triangle ADM respecte les conditions suivantes :

- le triangle ADM est rectangle en A
- AD = 2 m
- $\widehat{ADM} = 60°$

1. Montrer que [AM] mesure environ 3,46 m.
2. La partie de la plaque non utilisée est représentée en quadrillé sur la figure 2.
   Calculer une valeur approchée au centième de la proportion de la plaque qui n'est pas utilisée.
3. Pour que la superposition des triangles soit harmonieuse, Joanna veut que les trois triangles AMD, PNM et PDN soient semblables. Démontrer que c'est bien le cas.
4. Joanna aimerait que le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle PDN au triangle AMD soit plus petit que 1,5. Est-ce le cas ? Justifier.

Brevet de la Réunion, 2019

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Brevet_2019_index_V3.pdf

4. La géométrie du semblable : une passerelle entre les cycles

En cycle 3 :

- « Proportionnalité : Reproduire une figure en respectant une échelle. Agrandissement ou réduction d’une figure. Reproduire une figure a partir d’un modèle (l’échelle pouvant être donnée par des éléments déjà traces). » (Programmes)

- « La proportionnalité doit être traitée dans le cadre de chacun des trois domaines ‘nombres et calculs’, ‘grandeurs et mesures’ et ‘espace et géométrie’ ».

Malgré tout, la proportionnalité est essentiellement vue comme une propriété arithmétique, voire comme une simple méthode de calcul.

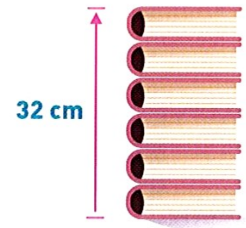
4. La géométrie du semblable : une passerelle entre les cycles

DICO 45

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Un problème est appelé « problème de proportionnalité » si deux grandeurs (quantités, prix, longueurs, masses…) sont en relation l'une avec l'autre et si, lorsque l'une est doublée, triplée…, l'autre est également doublée, triplée…

Des livres identiques empilés



Voici une pile de 6 livres identiques : elle fait 32 cm de haut.

La hauteur de 3 livres empilés serait donc de 16 cm.
➜ Il y a deux fois moins de livres, donc la hauteur est deux fois moins importante.

La hauteur de 18 livres empilés serait donc de 96 cm.
➜ Il y a trois fois plus de livres, donc la hauteur est trois fois plus importante.

Des mélanges

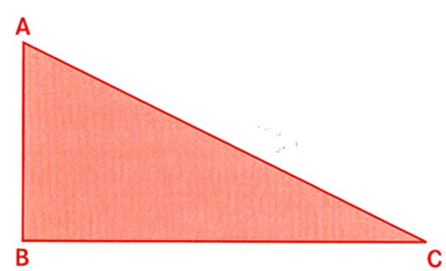
eau : 4 verres
sucre : 6 g

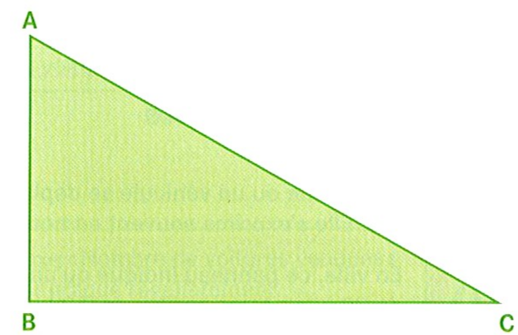
5 fois plus d'eau
4 fois plus de sucre

eau : 20 verres
sucre : 24 g

➜ L'eau de la deuxième bouteille est donc moins sucrée que celle de la première.

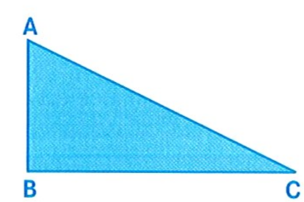
Des figures agrandies ou réduites





Dans le triangle rouge, **BC** est deux fois plus grand que **AB**.

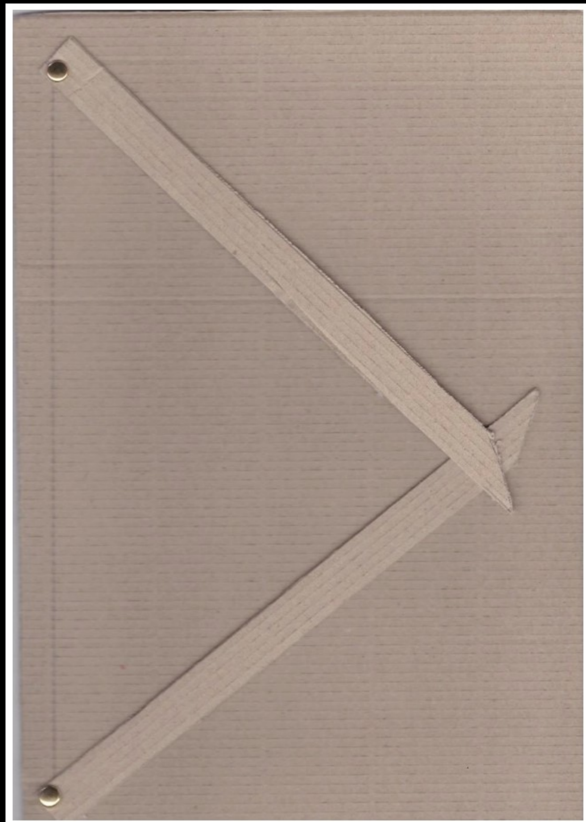
Le triangle vert n'est pas un agrandissement du triangle rouge, car **BC** n'est pas deux fois plus grand que **AB**.

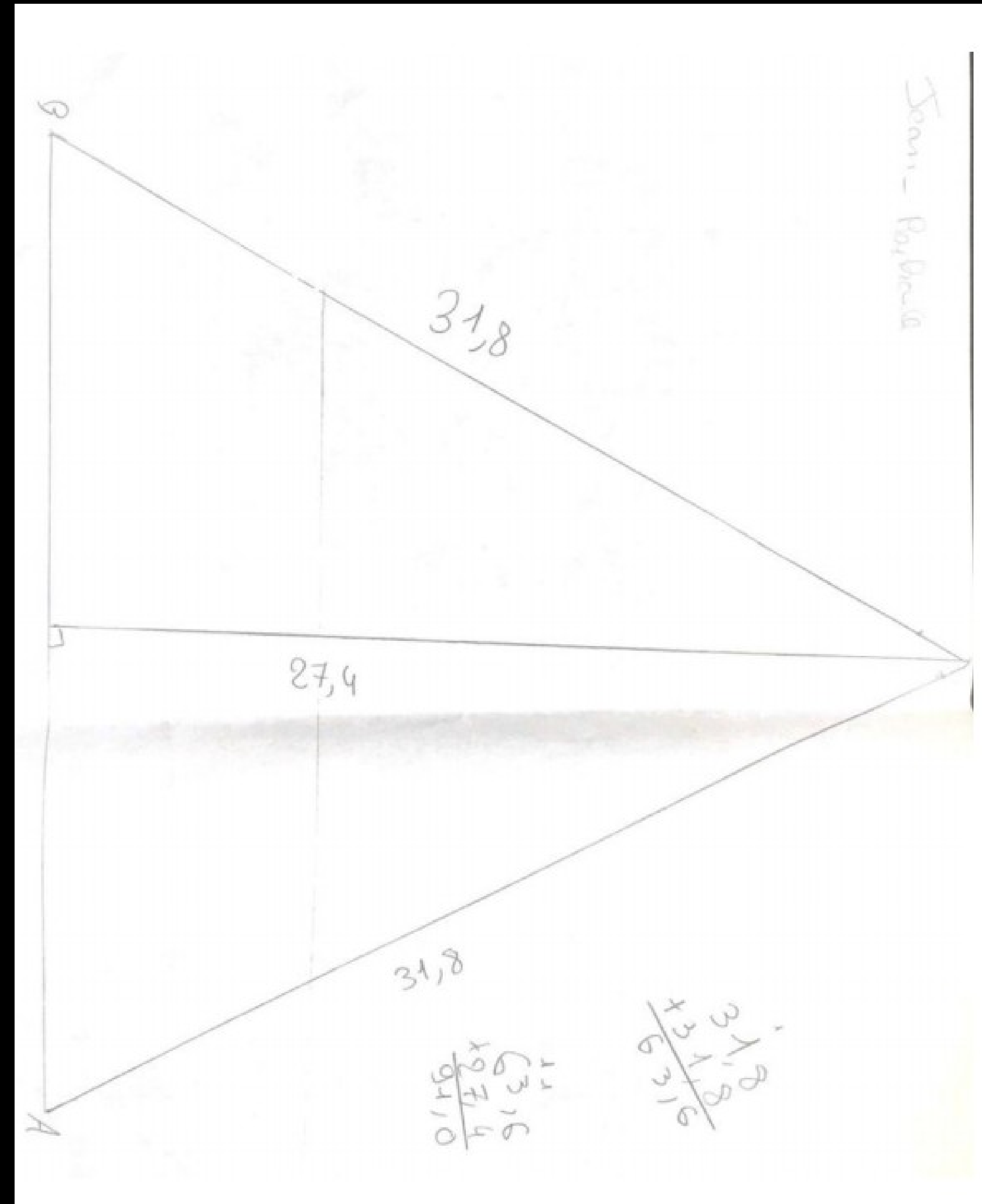


Le triangle bleu est une réduction du triangle rouge, car **BC** est deux fois plus grand que **AB**.

Cap Math, 2015, *Dico Math CM1 et CM2*, p. 23-24

En cycle 3 :





« Triangulation » instrumentée à l’aide d’une planchette en cycle 3.

→ Mémoire de Clara POTET, INSPE Lille Nord-de-France, 2019

En cycle 4 :

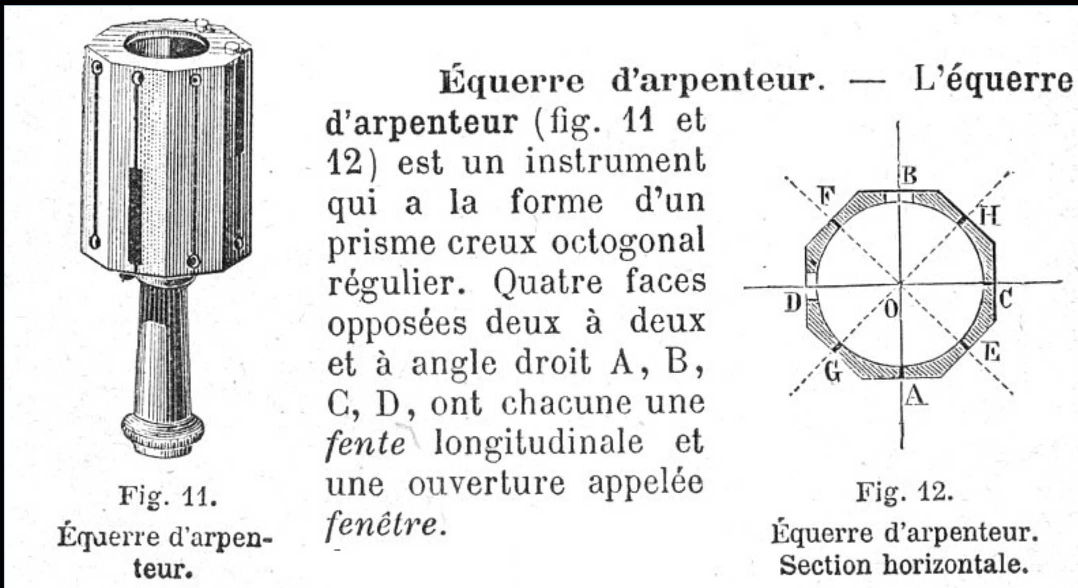


Fig. 11.
Équerre d'arpenteur.

Équerre d'arpenteur. — **L'équerre d'arpenteur** (fig. 11 et 12) est un instrument qui a la forme d'un prisme creux octogonal régulier. Quatre faces opposées deux à deux et à angle droit A, B, C, D, ont chacune une *fente* longitudinale et une ouverture appelée *fenêtre*.

Fig. 12.
Équerre d'arpenteur.
Section horizontale.

Master MEEF, premier degré, activité de levé de plans, alignements et arpentages (2018).

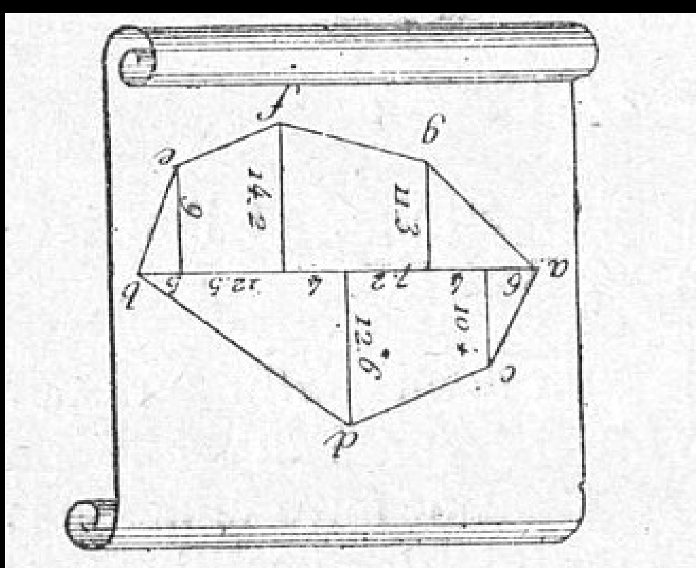
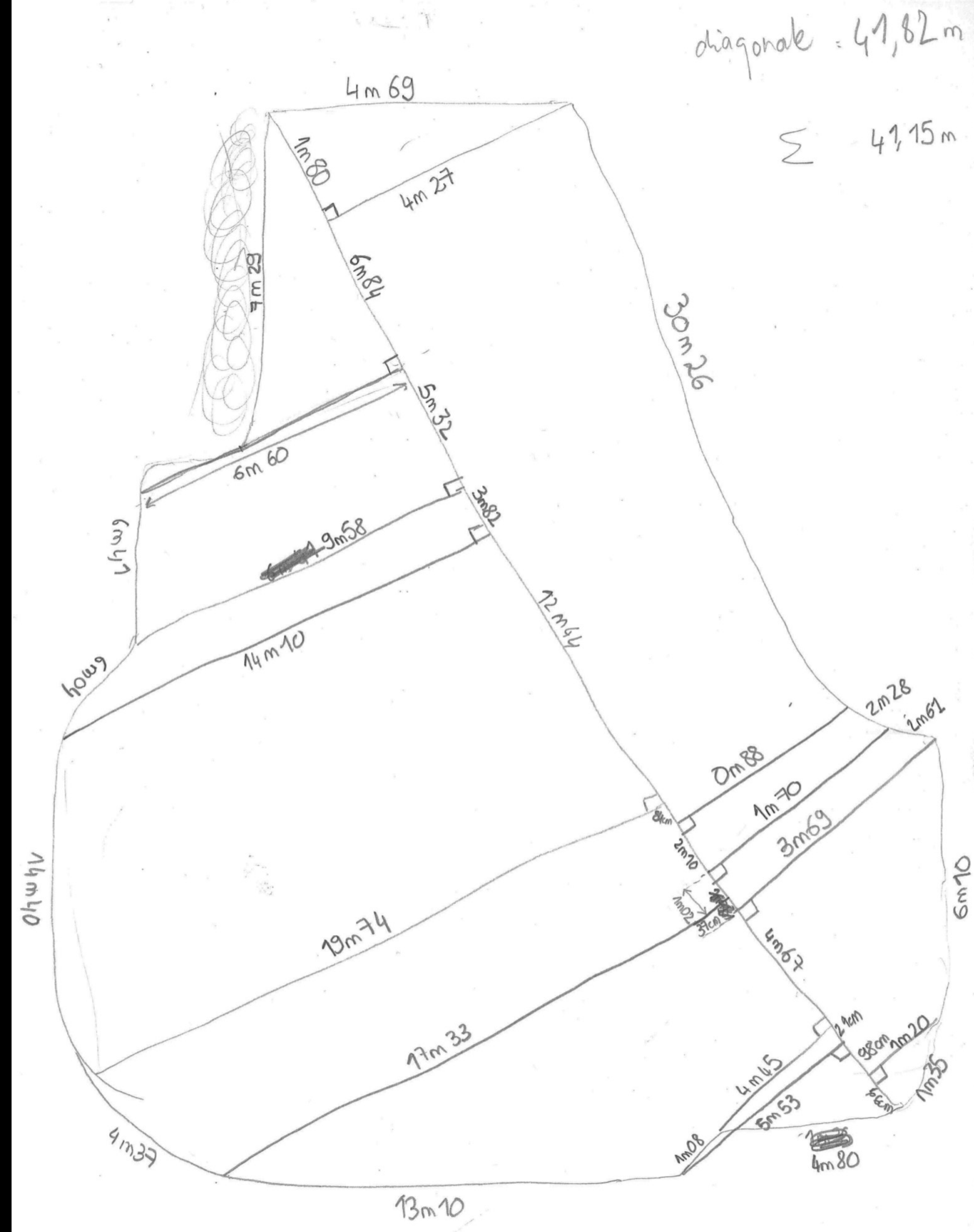
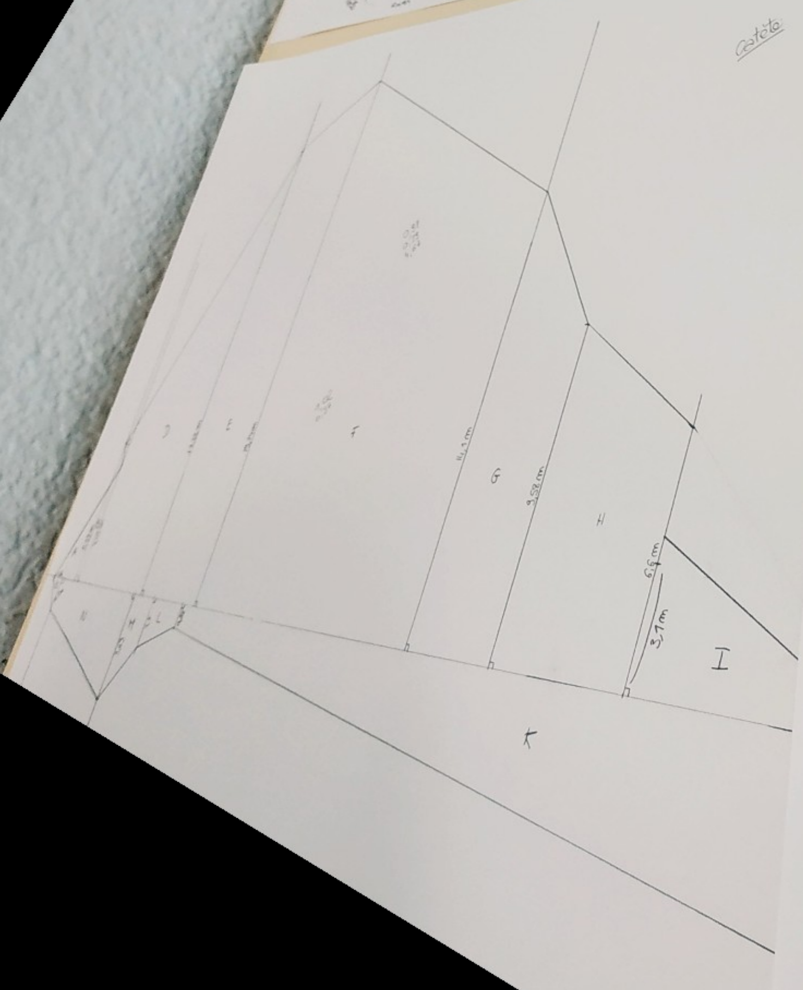


Fig. 66. — Croquis.
Levé à l'équerre par alignement.



Master MEEF, premier degré, activité de levé de plans, alignements et arpentages (2019).



$$\text{Aire}(A) = \frac{5,53 \times (0,98 + 0,66)}{2} = 4,5346\ m^2$$

$$\text{Aire}(B) = \frac{4,45 + 5,53}{2} \times 0,29 = 1,4471\ m^2$$

$$\text{Aire}(C) = \frac{1,08 \times 0,29}{2} = 0,1566\ m^2$$

$$\text{Aire}(D) = \frac{5,53 + 17,33}{2} \times 5,15 = 58,8645\ m^2$$

$$\text{Aire}(E) = \frac{19,74 + 17,33}{2} \times 4 = 74,14\ m^2$$

$$\text{Aire}(f) = \frac{14,1 + 19,74}{2} \times 12,44 = 210,4848\ m^2$$

$$\text{Aire}(G) = \frac{14,1 + 9,58}{2} \times 3,82 = 45,2288\ m^2$$

$$\text{Aire}(H) = \frac{6,6 + 9,58}{2} \times 5,32 = 43,0388\ m^2$$

$$\text{Aire}(I) = \frac{(1,8 + 6,84) \times 3,1}{2} = 13,392\ m^2$$

$$\text{Aire}(J) = \frac{4,27 \times 1,8}{2} = 3,843\ m^2$$

$$\text{Aire}(K) = \frac{4,27 + 0,88}{2} \times (\underbrace{0,84 + 12,44 + 3,82 + 5,32 + 6,84}_{29,26}) = 75,3445\ m^2$$

$$\text{Aire}(L) = \frac{0,88 + 1,7}{2} \times 2,1 = 2,709\ m^2$$

$$\text{Aire}(M) = \frac{1,7 + 3,69}{2} \times 1,39 = 3,74605\ m^2$$

$$\text{Aire}(N) = \frac{3,69 + 1,2}{2} \times 5,94 = 14,5233\ m^2$$

$$\text{Aire}(O) = \frac{1,2 \times 0,66}{2} = 0,396\ m^2$$

$$551,249\ m^2$$

4. La géométrie du semblable : une passerelle entre les cycles

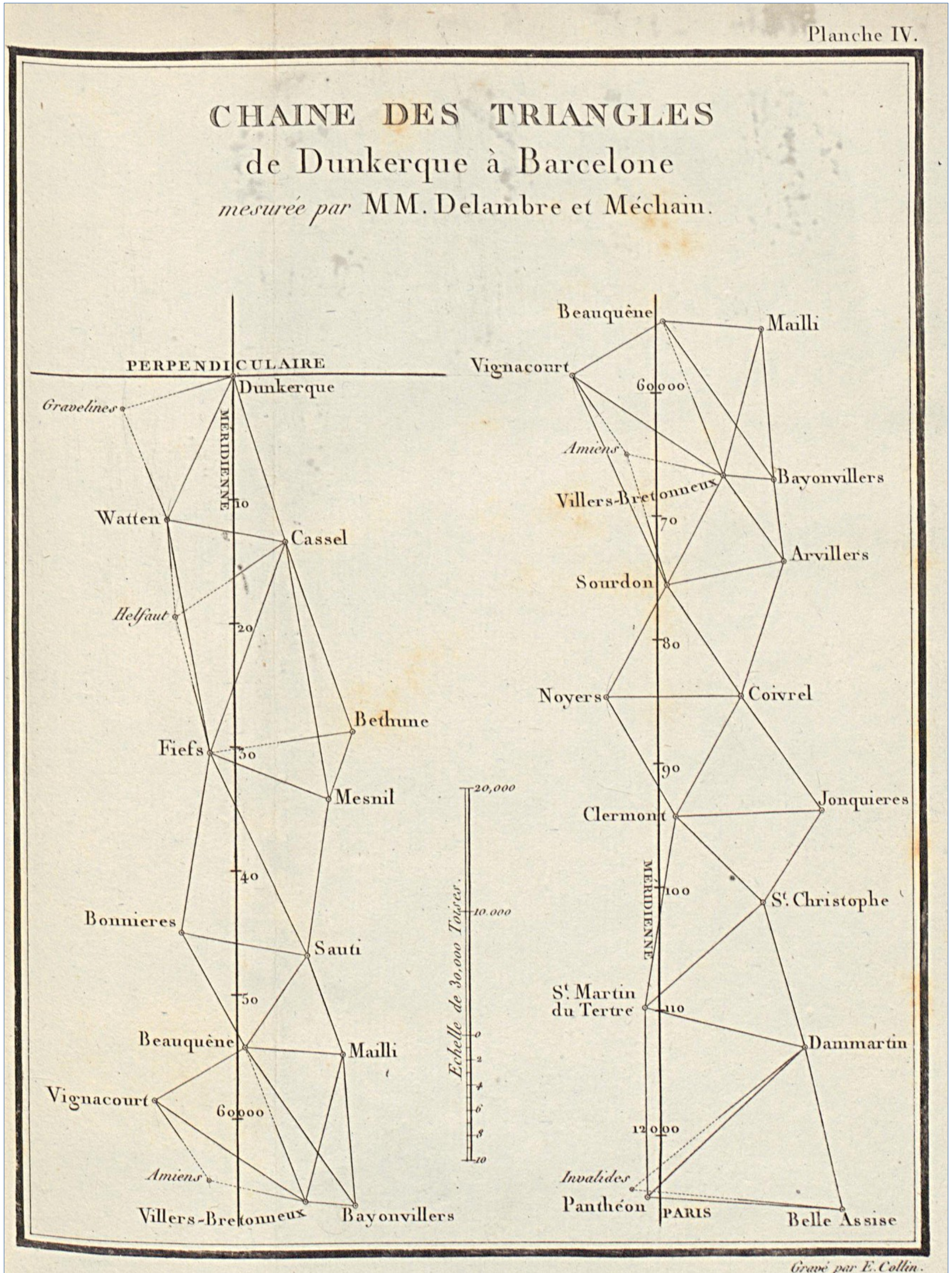
Au lycée :

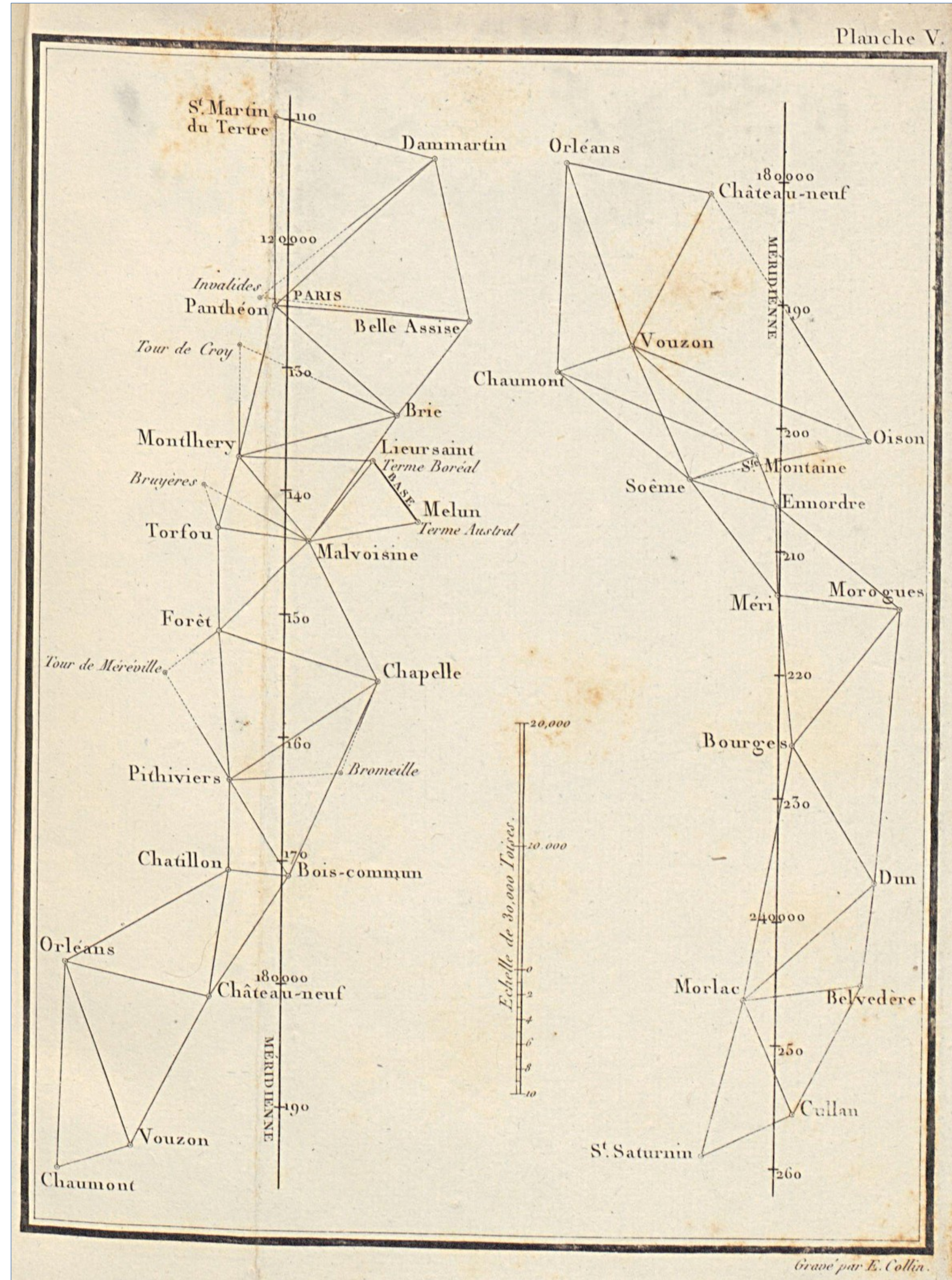
- Enseignement scientifique commun de première :

LA FORME DE LA TERRE ET LES MESURES À LA SURFACE DE LA TERRE

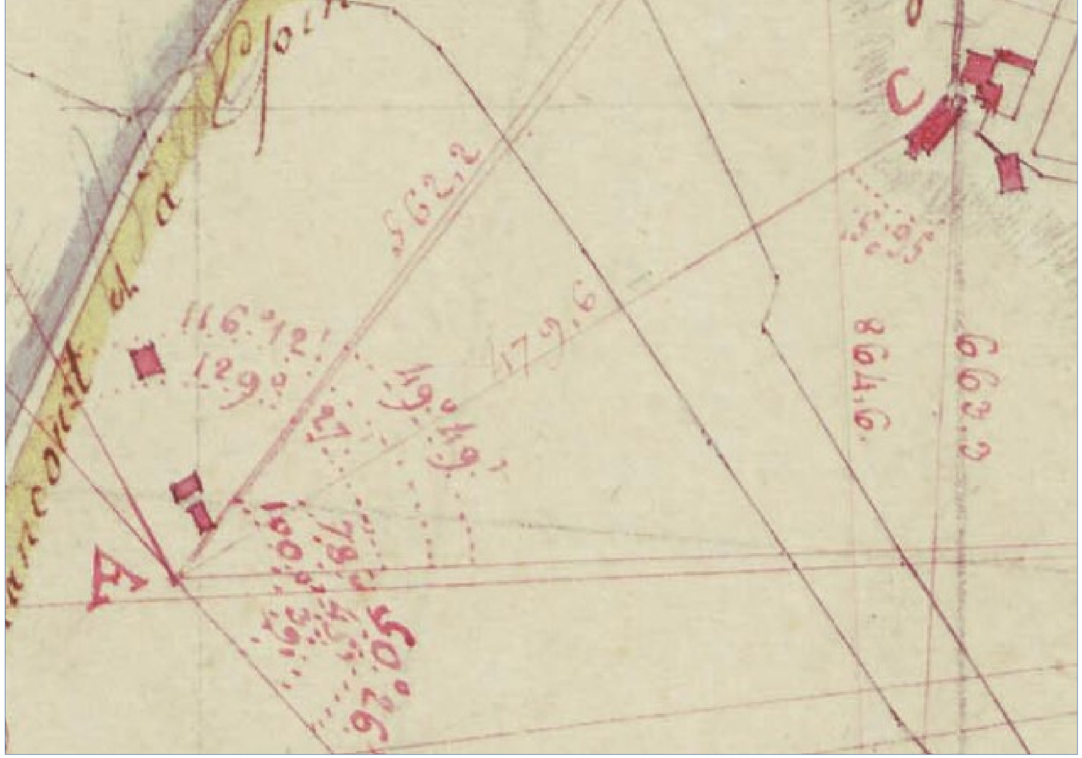
Histoire traditionnelle des grands hommes et des grandes découvertes.

« Calculer la longueur du méridien terrestre par la méthode dite d'Ératosthène. Calculer une longueur par la méthode de triangulation utilisée par Delambre et Méchain. Calculer le rayon de la Terre à partir de la longueur du méridien »





J.-B. J. Delambre et P. Méchain, *Base du système métrique décimal ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone*, Paris, Beaudoin, 1806



Cadastre de la commune de Girancourt (tableau d’assemblage, détail) ; Géoportail : https://www.geoportail.gouv.fr/carte (pour 88390 Girancourt)

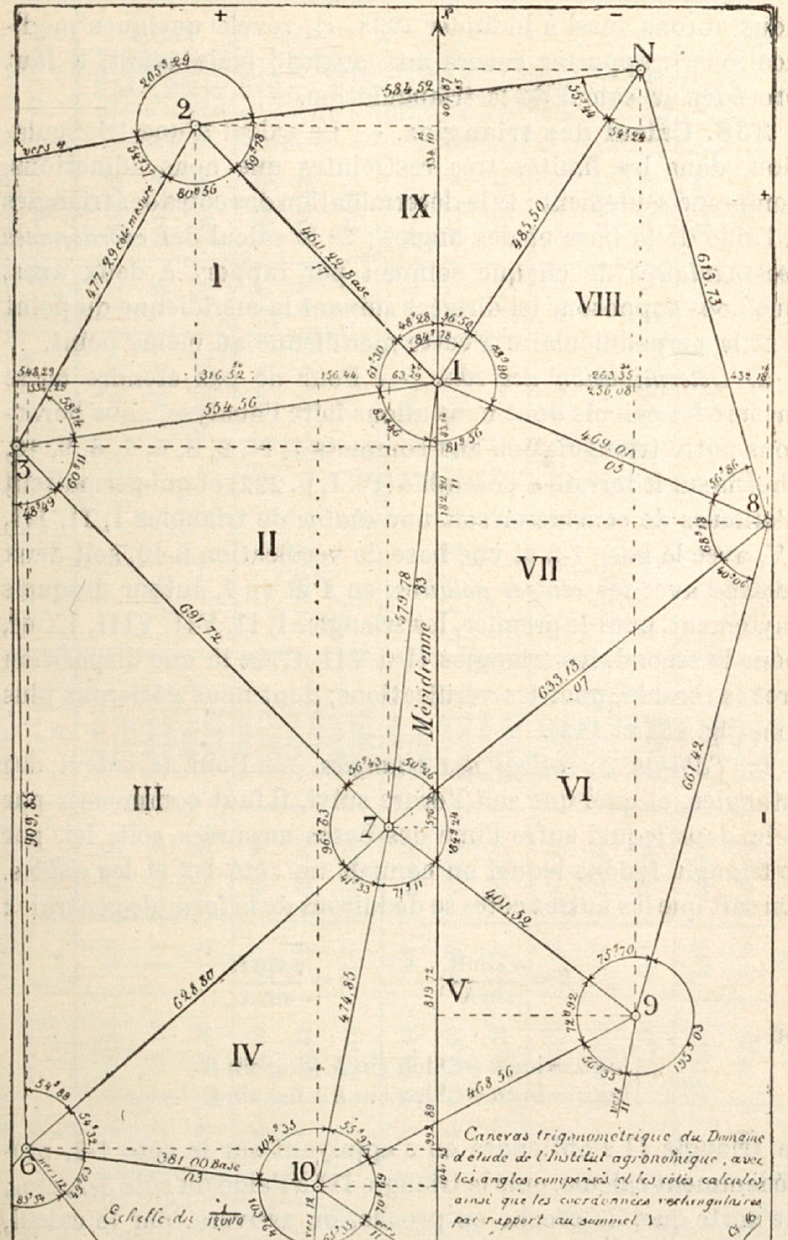


Fig. 138. — Observations trigonométriques et coordonnées.

Tableau des calculs de la triangulation.

TRIANGLES. 1	SOMMETS. 2	ANGLES. 3	CÔTÉS OPPOSÉS. 4	5	LOGARITHMES. 6
1	1	g. 61,30	2-3	477,29	2,67878 / 9,91426
	3	58,14	1-2	460,22	0,10155 / 2,66297
	2	80,56	1-3	554,56	9,97943 / 2,74395
II	1	83,46	3-7	691,72	2,83993 / 9,98517
	7	56,43	1-3	554,56	0,11081 / 2,74395
	3	60,11	1-7	579,78	9,90850 / 2,76326
III	3	48,49	6-7	628,80	2,79851 / 9,83393
	6	54,88	3-7	691,72	0,11965 / 2,83993
	7	96,63	3-6	909,85	9,99939 / 2,95897

1	1	61g,30	2-3	....	.... / ....
	3	58g,14	1-2	460,22	.... / ....
	2	80g,56	1-3	....	.... / ....

C. Muret, *Topographie, arpentage, nivellement, cadastre*, Paris, Baillère, deuxième édition, 1914, p. 239, 241 et 242.

Conclusion

L'identification des tâches permet de cerner les différents enjeux d'une séance mêlant mathématiques et histoire ... Certains temps seront consacrés aux mathématiques sans lien explicite avec l'histoire, d'autres porteront au contraire sur des connaissances historiques sans appel fort à des contenus mathématiques. Ces deux dimensions seront complétées par des tâches spécifiques où les deux champs entrent explicitement en contact et où le double contenu ciblé se réalise finalement.

Thomas de Vittori, *Les tâches des élèves dans une activité mathématique à dimension historique*, Petit X, 97, 2015, p. 1–22.

Bibliographie sélective

Chatelon David et Troudet Marc, « Expériences de géométrie pratique avec graphomètre en classe », in *Les mathématiques et le réel. Expériences, instruments, investigations* (collectif), Rennes, PUR, 2018, p. 49-61.

Chevalarias Nathalie, « Instruments et méthodes de dessin : de la géométrie pratique vers l'enseignement secondaire au début du XXe siècle », in *Les mathématiques et le réel. Expériences, instruments, investigations* (collectif), Rennes, PUR, 2018, p. 79-94.

Desjonquères Pierre et Morel Thomas, « Géométrie du cadastre et enseignement, hier et aujourd'hui », Actes des journées académiques de mathématiques de l'IREM de Lille 2018, (à paraître).

Troudet Marc, « Et si nous mesurions la cour de l’école ? Expériences d’arpentage », in *Passerelles. Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*, 2018, p. 173–199.

La géométrie du semblable,
pratiques historiques et enseignements actuels

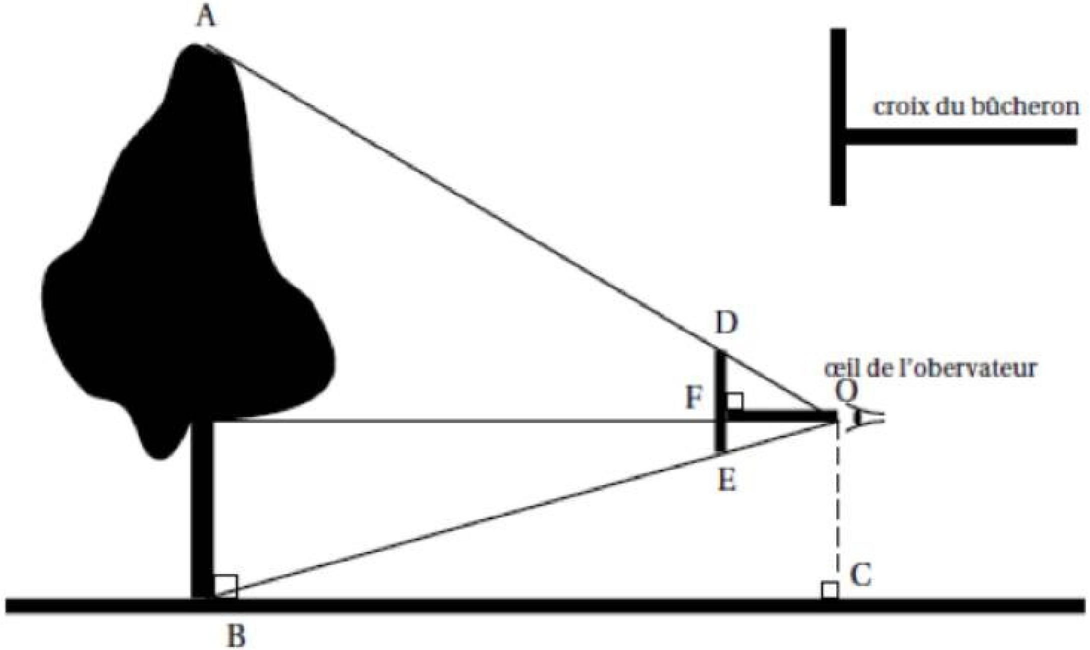
Thomas Morel
Lille,
14.02.20

thomas.morel@univ-lille.fr

Ce qu'il faudrait éviter de faire :

Exercice 2

Julien veut mesurer un jeune chêne avec une croix de bûcheron comme le montre le schéma ci-dessous.



Il place la croix de sorte que O, D et A d'une part et O, E et B d'autre part soient alignés. Il sait que $DE = 20$ cm et $OF = 35$ cm. Il place (DE) verticalement et (OF) horizontalement. Il mesure au sol $BC = 7,7$ m.

1. Justifiez que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
2. Calculez le rapport $\frac{AB}{DE}$.
3. Déduire la hauteur AB de l'arbre en mètres.
4. Certaines croix du bûcheron sont telles que $DE = OF$. Quel avantage apporte ce type de croix ?

Sujet ESPE Lille Nord-de-France, premier semestre 2015–2016, session 1